**Mövzu № 1. Ədədi sıralar.**

**Sabit işarəli sıralar Ədədi sıralar. Sabit işarəli sıraların yığılma əlamətləri: Müqayisə əlamətləri, Koşi əlaməti, Dalamber əlaməti və Koşi inteqral əlaməti**.

Fərz edək ki,  ixtiyari bir ədədi ardıcıllıqdır. Bu ədədi ardıcıllığın hədlərindən aşağdakı formal cəmi düzəldək:

. (1)

(1)-ə **ədədi sıra , ** ədədlərininhər birinə isə bu **ədədi sıranın hədləri** deyilir. ,  işarə edib, -ə birinci,-yə ikinci, -ə üçüncü və s. -ə **-ci xüsusi cəm** deyilir. Bu qayda ilə biz yeni bir ədədi ardıcıllığını aldıq. -ə **(1) ədədi sırasının xüsusi cəmlər ardıcıllığı** deyilir.

**Tərif.** Ədədi sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığının sonlu limiti varsa, onda ədədi sıraya **yığılan ədədi sıra ,** həmin limitə isə bu **ədədi sıranın cəmi** deyilir.

Bu tərifə əsasən sonlu  limiti varsa, onda (1) -ə yığılan ədədi sıra deyilir. Bu halda  və ya  yazırlar.

Xüsusi cəmlər ardıcıllığının sonlu limiti olmadıqda ədədi sıraya **dağılan ədədi sıra** deyilir. Başqa sözlə,  ədədi ardıcıllığının limiti yoxdursa və ya  olarsa , onda (1) ədədi sırasına dağılan ədədi sıra deyilir.  olduqda şərti olaraq  yazırlar.

Qeyd etmək lazımdır ki, ədədi ardıcıllığının sonlu limiti olmadıqda (1) cəmi heç nəyi ifadə etmir.Ona görə də yuxarıda ədədi sıraya tərif verilərkən «formal cəm» terminindən istifadə olundu.

Ədədi sıralara bir neçə misal göstərək.

**1.** .

Bu ədədi sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığını düzəldək:

.

Göründüyü kimi,  , , . Aydındır ki, bu ədədi sıranın  xüsusi cəmlər ardıcıllığının limiti yoxdur. Doğrudan da , ədədi ardıcıllıq yığılan olduqda onun hər bir altardıcıllığı da həmin ardıcıllığın yığıldığı ədədə yığılır. Lakin bu ədədi sıranın  xüsusi cəmlər ardıcıllığının tək nömrəli  altardıcıllığı  stasionar ardıcıllıq olub -ə , cüt nömrəli  altardıcıllığı  isə 0-a yığılır. Deməli, -in limiti yoxdur. Ona görə də verilən sıra dağılandır.

Qeyd edək ki , riyaziyyatda yığılan ədədi sıra anlayışı formalaşmamışdan əvvələr  cəmi uzun müddət riyaziyyatçılar arasında ziddiyyətli mülahizələrə gətirib çıxarmışdır. Məsələn, bəziləri bu cəmi 

= kimi yazıb, onun sıfra bərabər olduğunu güman etmişlər. Başqa bir qisim riyaziyyatçılar bu cəmi   kimi yazıb onu -ə bərabər hesab etmişlər.

Bu cəmin qiymətini  ilə işarə edib,



nəticəsini alıb,  hesab edənlər də olmuşdur.

Əslində isə  ədədi sırası dağılan olduğundan bu yazılış formal cəm olub, onun heç bir qiyməti yoxdur.

Yuxarıda yalnış nəticələrə gətirib çıxaran mülahizələrdəki səhvləri tapmaq özünüzə tapşırılır!

**2. ** ədədi sırasının yığılan olub olmadığını araşdıraq.Bunun üçün əvvəlcə həmin sıranın -ci xüsusi cəmini yazaq: .

Həndəsi silsilənin hədlər cəmi düsturuna görə

 (2)

Aşağıdakı hallara ayri-ayriliqda baxaq:

**1-ci hal. .** Bu halda  olduğu üçün (2)-dən alırıq:



Beləliklə, **** olduqda **** ədədi sıra yığılandır və onun cəmi -dür. Ona görə **** olduqda  ****yazmaq olar.

**2-ci hal. .** Bu halda ya **,** ya da  olmalıdır. **** olduqda **** ədədi sırası  ədədi sırasına çevrilir ki, onun da dağılan olduğu birinci misalda göstərilmişdir.

 olduqda **** ədədi sırası  ədədi sırasına çevrilir. Sonuncu ədədi sıranın -ci xüsusi cəmi  və  olduğu üçün  olduqda da verilən ədədi sıra dağılandır.

**3-cü hal: .** Bu halda (2)-dən alınır ki, -in sonlu limiti yoxdur.

Beləliklə, verilən **** ədədi sırası **** olduqda yığılan , **** olduqda isə dağılandır.

**Teorem (Ədədi sıralar üçün Koşi kriteriyası ).** (1) ədədi sırasının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən  ədədinə görə elə  nömrəsinin tapılmasıdır ki,  şərtini ödəyən bütün  nömrələri və istənilən natural  ədədi üçün

 (3)

olsun.

**İsbatı**. (1) ədədi sırasının  xüsusi cəmlər ardıcıllığı yığılan olduqda bu ədədi sıra da yığılandır. Ədədi ardıcıllıqlar üçün Koşi kriteriyasına (II fəsil, §9) görə -in yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt  , , olduqda 

**** (4)

olmasıdır. (4)-ün sol tərəfini açıq şəkildə yazaq:

****

Sonuncu bərabərliyi (4)-ün sol tərəfində nəzərə alsaq , (3)-ü alarıq. Teorem isbat olundu.

İndi isə yığılan ədədi sıraların bəzi xassələrini qeyd edək.

1. **xassə.** (1) ədədi sırası yığılan olduqda

 (5)

şərti ödənilir.(5)-ə **ədədi sıranın yığılmasının zəruri şərti** deyilir.

**İsbatı.** Tutaq ki, (1) ədədi sırası yığılandır. Onda  limiti sonludur. Aydındır ki, . Buradan və  olmasından alırıq: .

**Qeyd.** (5) bərabərliyinin ödənilməsi (1) ədədi sırasının yıgılması üçün zəruri şərt olub, onun yığılmasının kafi şərti deyil. Yəni elə ədədi sıralıar vardır ki, onlar üçün (5) şərti ödənildiyi halda, bu sıralar dağılandırlar. **Harmonik sıra** adlanan ədədi sırası üçün yığılmanın zəruri şərti olan (5) ödənilir: . Lakin bu ədədi sıra dağılandır. Doğrudan da, bu ədədi sıra üçün 

olduğu aydındır. Deməli  götürdükdə harmonik sıra üçün (4) şərti ödənilmir. Ona görə də harmonik sıra dağılandır.

**2) xassə.**  ədədi sırası yığılan olduqda istənilən  sabiti üçün  ədədi sırası da yığılandır.

**İsbatı.** Fərz edək ki,  ədədi sırası yığılandır. Onda bu ədədi sıranın  xüsusi cəmlər ardıcıllığının sonlu limiti vardır: .  ədədi sırasının -ci xüsusi cəmini  ilə işarə edək: . Aydındır ki,  , buradan isə  alınır. Deməli,  ədədi sırası yığılandır.

1. **xassə.** və  ədədi sıralarının hər ikisi yığılan olduqda  ədədi sırası da yığılandır.

Bütün hədləri mənfi olmayan sıraları **müsbət hədli sıralar** adlandırmaq qəbul olunmuşdur. Bütün hədləri müsbət olan ədədi sıralara isə **ciddi müsbət hədli sıralar** deyilir.Hər bir müsbət hədli sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığı azalmayandır. Doğrudan da, tutaq ki,  müsbət hədli ədədi sıradır. Onda . olmalıdır. 

 və şərtə görə  olduğu üçün buradan  olduğu alınır. Bu isə o deməkdir ki,  azalmayan ardıcıllıqdır.

Tutaq ki, ixtiyari bir yığılan ədədi sıradır. Onda bu ədədi sıranın  xüsusi cəmlər ardıcıllığı yığılandır. Hər bir yığılan ardıcıllıq məhdud olduğundan (II fəsil, §3, teorem 2) ədədi ardıcıllığı məhduddur. Beləliklə, hər bir yığılan ardıcıllığın xüsusi cəmlər ardıcıllığı məhduddur. Lakin xüsusi cəmlər ardıcıllığı məhdud olan ədədi sıra yığılan olmaya da bilər. Məsələn  ədədi sırasının xüsusi cəmlər ardıcıllığı məhduddur: . Lakin bu ədədi sıra dağılandır.

**Teorem (Müsbət hədli sıraların yığılmasının zəruri və kafi şərti).** Müsbət hədli sırasının yığılması üçün zəruri və kafi şərt onun xüsusi cəmlər ardıcıllığının yuxarıdan məhdud olmasıdır.

**İsbatı. Zəruriliyin isbatı.** Fərz edək ki, müsbət hədli ədədi sıra yığılandır. Biz yuxarıda göstərdik ki , istənilən yığılan ədədi sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığı məhduddur. Ona görə yığılan müsbət hədli ədədi sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığı da yuxarıdan məhdud olacaqdır.

**Kafiliyin isbatı.** İndi isə fərz edək ki,  müsbət hədli sıranın  xüsusi cəmlər ardıcıllığı yuxarıdan məhduddur. Ədədi sıra müsbət hədli olduğundan onun xüsusi cəmlər ardıcıllığı azalmayandır.Məlumdur ki, azalmayan ardıcıllıq yuxarıdan məhdud olduqda yığılandır. Deməli -in sonlu limiti var, yəni  ədədi sırası yığılandır. Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, müsbət hədli ədədi sıra yığılan olmadıqda , onun xüsusi cəmlər ardıcıllığı qeyri-məhdud olur .

Müsbət hədli sıralar. Müsbət hədli sıralar üçün müqayisə və yığılma əlamətləri

Bütün hədləri mənfi olmayan sıraları **müsbət hədli sıralar** adlandırmaq qəbul olunmuşdur. Bütün hədləri müsbət olan ədədi sıralara isə **ciddi müsbət hədli sıralar** deyilir. Hər bir müsbət hədli sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığı azalmayandır. Doğrudan da, tutaq ki,  müsbət hədli ədədi sıradır. Onda . olmalıdır. 

 və şərtə görə  olduğu üçün buradan  olduğu alınır. Bu isə o deməkdir ki,  azalmayan ardıcıllıqdır.

Tutaq ki, ixtiyari bir yığılan ədədi sıradır. Onda bu ədədi sıranın  xüsusi cəmlər ardıcıllığı yığılandır. Hər bir yığılan ardıcıllıq məhdud olduğundan (II fəsil, §3, teorem 2) ədədi ardıcıllığı məhduddur. Beləliklə, hər bir yığılan ardıcıllığın xüsusi cəmlər ardıcıllığı məhduddur. Lakin xüsusi cəmlər ardıcıllığı məhdud olan ədədi sıra yığılan olmaya da bilər. Məsələn  ədədi sırasının xüsusi cəmlər ardıcıllığı məhduddur: . Lakin bu ədədi sıra dağılandır (bu fəsil §1-ə bax!).

Müqayisə əlaməti dedikdə yığılması və ya dağılması məlum olan bir ədədi sıra ilə müqayisə nəticəsində başqa bir ədədi sıranın yığılması və ya dağılmasına dair hökmü ifadə edən təklif nəzərdə tutulur. Müsbət hədli ədədi sıralar üçün bir neçə müqayisə əlamətləri ilə tanış olaq.

**Teorem 1.** Tutaq ki, müsbət hədli

, (1)  (2)

ədədi sıralarının hədləri arasında

 (3)

şərti ödənilir. Onda (2) ədədi sırası yığılandırsa (1) ədədi sırası da yığılandır, (1) ədədi sırası dağılandırsa (2) ədədi sırası da dağılandır.

**İsbatı.** Əvvəlcə fərz edək ki, (2) ədədi sırası yığılandır. İsbat edək ki, onda (1) ədədi sırası da yığılandır. (1)-in -ci xüsusi cəmini , (2)-nin -ci xüsusi cəmini  ilə işarə edək: , . (3) şərtindən alınır ki,

 (4)

Fərziyyəmizə görə müsbət hədli (2) ədədi sırası yığılandır. Onda (2)-nin xüsusi cəmlər ardıcıllığı  yuxarıdan məhduddur: . Buradan və (4)-dən alırıq: . Deməli, (1)-in xüsusi cəmlər ardıcıllığı  yuxarıdan məhduddur. Müsbət hədli sıraların yığılmasının zəruri və kafi şərt teoreminə cörə (1) ədədi sırası yığılandır.

İndi isə fərz edək ki, (1) ədədi sırası dağılandır. İsbat edək ki, onda (2) ədədi sırası da dağılandır.

Məlumdur ki, müsbət hədli sıra dağılan olduqda onun xüsusi cəmlər ardığıllığı qeyri-məhdud olur. (1) dağılan olduğu üçün . Buradan və (4)-dən alınır ki, . Bu isə o deməkdir ki, (2) ədədi sırası dağılandır.

**Qeyd 1.** Teorem 1-dəki (3) şərti bütün hədlər üçün deyil, müəyyən nömrədən sonra gələn bütün hədlər üçün ödənildikdə də bu teoremin hökmü öz gücündə qalır.

**Qeyd 2.** Teorem 1-dəki (3) şərti əvəzinə  ,  şərti ödənildikdə də bu teoremin hökmü doğrudur.

**Teorem 2.** Tutaq ki, (1) müsbət hədli, (2) isə ciddi müsbət hədli sıradır. Əgər

 (5)

limiti sonludursa, onda (2) sırasının yığılmasından (1) sırasının yığılması, (1) sırasının dağılmasından (2) sırasının dağılması çıxır.

Koşi-Maklorenin inteqral əlaməti

Müsbət hədli bəzi sıraların yığılmasını Dalamber və Koşi əlamətlərinin köməyi ilə araşdırmaq mümkün olmur. Məsələn, **ümumiləşmiş harmonik sıra** adlanan



ədədi sırasının yığılması və ya dağılmasını Dalamber, Koşi əlamətləri ilə tədqiq etmək olmur. Dalamber əlamətinin limit şəklindən istifadə etdikdə



Koşi əlamətinin limit şəklindən istifadə etdikdə



alınır (Biz burada  olmasından istifadə etdik).

olduqda müqayisə əlamətinin köməyi ilə  sırasının dağılan olduğunu isbat etmək olar. Doğrudan da , oluqda istənilən  natural ədədi üçün  bərabərsizliyi doğrudur.  harmonik sırası dağılan olduğundan buradan müqayisə əlamətinə görə alınır ki,  olduqda  ümumiləşmiş harmonik sırası da dağılandır.

Lakin  olduqda bu sıranın yığılan və dağılan olduğunu indiyə kimi verdiyimiz əlamətlərin köməyi ilə müəyyən etmək olmur. Aşağıda verilən əlamət olduqda da  sırasının, eləcə də Dalamber və Koşi əlamətlərinin köməyi ilə tədqiqi mümkün olmayan bir çox başqa müsbət hədli sıraların yığılmasını araşdırmağa imkan verir.

**Teorem (Koşi-Maklorenin inteqral əlaməti).** Fərz edək ki, funksiyası  yarımoxunda təyin olunmuş, mənfi olmayan qiymətlər alan və artmayan funksiyadır. Onda

 (1)

ədədi sırasının yığılan olamsı üçün zəruri və kafi şərt

 (2)

qeyri-məxsusi inteqralının yığılan olmasıdır.

**İsbatı.** Şərtə görə  funksiyası  yarımoxunda monoton olduğu üçün hər bir sonlu ,  parçasında inteqrallanandır. Ona görə də (2) qeyri-məxsusi inteqralının yığılması və ya dağılmasıdan dnışmaq olar.

 funksiyası  yarımoxunda artmayan olduğu üçün -in  şərtini ödəyən qiymətlərində  (3)

yazmaq olar. Müəyyən inteqralın xassəsinə görə (3)-dən alırıq :

(4)

(4)-də -ya  qiymətlərini verək və alınan bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplayaq:

 (5)

Biz (5)-i yazarkən müəyyən inteqralın

 xassəsindən istifadə etdik.

(1) sırasının -ci xüsusi cəmini  ilə işarə edək:. Onda aydındır ki,

.

Bunları (5)-də nəzərə alaq:

 . (6)

(6) bərabərsizliyindən istifadə etməklə teoremi isbat etmək asandır. Doğrudan da əvvəlcə tutaq ki, müsbət hədli (1) ədədi sırası yığılandır. Onda məlum teoremə görə (bu fəsildə §2-yə bax!) (1) ədədi sırasının  xüsusi cəmlər ardıcıllığı yuxarıdan məhduddur. Yəni elə bir  ədədi vardır ki, istənilən natural ədədi üçün olur. Buradan və (6)-dan alırıq ki,

; . (7)

Aşağıdakı işarəni qəbul edək:

; . (8)

 yarımoxunda  olduğu üçün alırıq ki, ümumi hədd düsturu (8) olan  ədədi ardıcıllığı azalmayandır. Məlumdur ki, azalmayan ədədi ardıcıllıq yuxarıdan məhdud olduqda yığılandır. Deməli, (7) və (8) -ə əsasən  olduğu üçün  limiti sonludur. Bu isə o deməkdir ki, (2) qeyri-məxsusi inteqralı yığılandır.

İndi isə fərz edək ki, (2) qeyri-məxsusi inteqralı yığılandır. (6)-dan istifadə edərək isbat edək ki, (1) ədədi sırası yığılandır.

Doğrudan da , (2) qeyri-məxsusi inteqralı yığılan, isə  yarımoxunda mənfi qiymətlər almayan funksiya olduğu üçün elə bir  ədədi vardır ki,

; 

olur. Buradan və (6)-dan alırıq:

;  .

Sonuncu münasibət onu göstəruir ki, (2) ədədi sırasının xüsusi cəmlər ardıcıllığı olan  yuxarıdan məhduddur. (2) müsbət hədli sıra olduğundan məlum teoremə görə yığılandır.

Teorem isbat olundu.

**Qeyd. ** ixtiyari natural ədəd, isə  yarımoxunda təyin olunmuş, mənfi olmayan qiymətlər alan və artmayan funksiya olduqda



ədədi sırasının yığılması üçün zəruri və kafi şərt



qeyri məxsusi inteqralının yığılan olmasıdır.

Koşi-Makloren əlamətinin köməyi ilə  olduqda, ədədi sırasının yığılmasını araşdıraq. işarə edək.  funksiyası  yarımoxunda müsbət qiymətlər alır və azalandır. Koşi-Makleron teoreminə görə  ədədi sırasının yığılması  qeyri-məxsusi inteqralının yığılmasna ekvivalentdir. Məlumdur ki,  olduqda

.

Beləliklə,  ümumiləşmiş harmonik sırası  olduqda dağılan,  olduqda isə yığılandır.

**Dalamber əlaməti və onun limit şəkli**

**Teorem 1 (Dalamber əlaməti).** Ciddi müsbət hədli  ədədi sırası üçün

 (1)

şərti ödənilirsə, bu ədədi sıra yığılan,

 (2)

şərti ödənildikdə isə bu sıra dağılandır.

**İsbatı.** Fərz edək ki, (1) şərti ödənilir.  işarə edərək,  ədədi sırasına baxsaq,  olduğu üçün bu ədədi sıra yığılandır. Digər tərəfdən  olduğu üçün (1)-ə əsasən



şərti ödənilir. Bu fəsil, §3, teorem 3-ə əsasən  ədədi sırasının yığılmasından  ədədi sırasının yığılması alınır.

İndi isə tutaq ki, (2) şərti ödənilir. İsbat edək ki, bu halda ədədi sırası dağılandır.  götürsək,  olduğu üçün (2) şərtini belə yazmaq olar:

.

 ədədi sırası dağılan olduğu üçün bu fəsil, §3, teorem 3-ə əsasən  ədədi sırası dağılandır. Teorem 1 isbat olundu.

**Qeyd.** Teorem 1-dəki (1) şərtini  şərti ilə əvəz etmək olmaz. Məsələn,  harmonik sırası üçün  olduğu üçün  şərti ödənilir. Lakin məlum olduğu kimi harmonik sıra dağılandır.

**Teorem 2 (Dalamber əlamətinin limit şəkli).** Ciddi müsbət hədli ədədi sırası üçün

 (3)

limiti varsa,  olduqda bu sıra yığılan,  olduqda isə bu sıra dağılandır.

**Koşi əlaməti və onun limit şəkli**

**Teorem 1 (Koşi əlaməti).** Müsbət hədli  ədədi sırası üçün

, () (1)

şərti ödənildikdə bu sıra yığılan,

 (2)

şərti ödənildikdə isə dağılandır.

**İsbatı.** Fərz edək ki, (1) şərti ödənilir. Onda olduqda (1)-dən

 (3)

olduğu alınır.  olduqda  ədədi sırası yiğılan olduğundan (3)-dən müqayisə əlamətinə görə ədədi sırasının yığılan olduğunu alırıq.

İndi isə fərz edək ki,  ədədi sırası üçün (2) şərti ödənilir. Bu halda (2)-dən

 (4)

olduğu alınır. (4) onu göstərir ki, ədədi sırasının yığılması üçün zəruri şərt ödənilmir. Ona görə də bu ədədi sıra dağılandır.Teorem 1 isbat olundu.

**Teorem 2. (Koşi əlamətinin limit şəkli).** Müsbət hədli ədədi sırası üçün

 (5)

limiti varsa ,  olduqda bu sıra yığılan,  olduqda isə dağılandır.

**Mövzu № 2. Dəyişən işarəli ədədi sıralar**

**Dəyişən işarəli ədədi sıralar. Dəyişən işarəli sıraların yığılma əlamətləri: Leybnis əlaməti, Abel əlaməti, Dirixle əlaməti. Mütləq və şərti yığılma.**

Əvvəlcə qeyd edək ki, müsbət hədli sıralar üçün məlum olan yığılma əlamətləri bütün hədləri müsbət olmayan sıralara da tətbiq oluna bilərlər. Lakin bu əlamətlər ilə hədləri müxtəlif işarəli olan ədədi sıraların yığılmasını tədqiq etmək olmaz. Hədləri müxtəlif işarəli olan sıralar arasında ən sadəsi **hədləri işarələrini növbə ilə dəyişhən ədədi sıralardır**. Belə ədədi sıraları aşağıdakı kimi yazmaq əlverişlidir:

, (1)

burada  olduğu fərz olunur. Hədləri işarələrini növbə ilə dəyişən ədədi sıralar üçün aşağıdakı təklif doğrudur.

**Teorem (Leybnis əlaməti).** Hədləri işarələrini növbə ilə dəyişən ədədi sıranın hədlərinin modullarından düzəldilmiş ədədi ardıcıllıq artmayan və sonsuz kiçiləndirsə, onda bu ədədi sıra yığılır.

**İsbatı.** Fərz edək ki, (1) ədədi sırası üçün bu teoremin şərtləri ödənilir. yəni  artmayandır  və sonsuz kiçiləndir: . Bu ədədi sıranın cüt nömrəli -ci xüsusi cəmini aşağıdakı kimi yazaq:

. (2)

Şərtə görə artmayan ardıcıllıq olduğu üçün (2)-nin sağ tərəfindəki mötərizələrin hər birinin daxilindəki ifadə mənfi olmayan ədəddir. Ona görə də  azalmayan ardıcıllıqdır.

Digər tərəfdən -i belə də yazmaq olar:

.

 üçün yazılan son ifadədən görünür ki, . Beləliklə, (1)-in cüt nömrəli xüsusi cəmlərinin  ardıcıllığı azalmayan olub, yuxarıdan məhduddur. Məlum teoremə görə (II fəsil, §7)  yığılandır. Onun limitini  ilə işarə edək:

. (3)

Aydındır ki,

 (4)

(4)-də  şərtində limitə keçib (3)-ü və teoremin şərtinə görə  olduğunu nəzərə alaq:

.

Deməli, (1)-in tək nömrəli xüsusi cəmlərinin  ardıcıllığı da  ədədinə yığılır. Buradan isə alınır ki,  ardıcıllığının özü də  ədədinə yığılır. Beləliklə, (1) ədədi sırası yığılandır. Teorem isbat olundu. Bu teoremin şərtini ödəyən sıralara **Leybnis sıraları** deyilir.

**Mütləq yığılan və şərti yığılan ədədi sıralar**

Hədləri ixtiyari işarəli olan

 (1)

ədədi sırasına baxaq və bu sıranın hədlərinin modullarından aşağıdakı ədədi sıranı düzəldək:

. (2)

**Tərif.** Ədədi sıranın hədlərinin modullarından düzəldilmiş sıra yığılan olduqda əvvəlki sıraya **mütləq yıüğılan ədədi sıra**  deyilir.

Yəni (2) yığılan olduqda (1)-ə mütləq yığılan ədədi sıra deyilir. Bu tərifdə (1) ədədi sırasının yığılan olub-olmaması haqqında heç nə deyilmir. Məsələ burasındadır ki, aşağıdakı teorem doğrudur.

**Teorem 1.**  Mütləq yığılan ədədi sıra yığılandır.

**İsbatı.** Fərz edək ki, (1) mütləq yığılan ədədi sıradır, yəni (2) yığılan ədədi sıradır. (2) yığılan ədədi sıra olduğu üçün ədədi sıralar üçün Koşi kriteriyasına görə (bu fəsil, §1) ,  olduqda  natural ədədi üçün

 (3)

şərti ödənilməlidir. Cəmin modulunun xassəsinə görə (3)-dən alınır ki,  olduqda

 (4)

olur. (4)-ə əsasən ədədi sıralar üçün Koşi kriteriyasından alınır ki, (1) ədədi sırası yığılandır.

Teorem 1 isbat olundu.

Mütləq yığılan ədədi sıralar üçün aşağıdpkı təklif doğrudur.

**Teorem 2 (Koşi teoremi).** Mütləq yığılan ədədi sıranın hədlərinin yerlərini ixtiyari qayda ilə dəyişməklə alınan yeni sıra da mütləq yığılandır və yeni sıranın cəmi əvvəlki sıranın cəmi ilə üst-üstə düşür (isbatsız).

**Tərif.** Özü yığılan olub, hədlərinin modullarından düzəldilmiş sıra dağılan olduqda əvvəlki sıraya **şərti yığılan ədədi sıra** deyilir.

Başqa sözlə (1) yığılan, (2) isə dağılan olduqda (1)-ə şərti yığılan ədədi sıra deyilir.

Qeyd etmək lazımdır ki, hər bir şərti yığılan ədədi sıralarda həm müsbət, həm də mənfi hədlər sonsuz sayda olur. Doğrudan da, müsbət və ya mənfi hədlər sonlu sayda olsaydı, onda bu sonlu sayda hədləri atmaqla bütün hədləri eyni işarəli olan ədədi sıra alardıq ki, onun yığılan olması həm də mütləq yığılan olması demək olardı. Şərti yığılan sıranın isə hədlərinin modullarından düzəldilmiş sıra dağılan olmalıdır. Şərti yığılan ədədi sıralar üçün aşağıdakı təklif doğrudur.

**Teorem (Riman teoremi).** Əvvəlcədən verilmiş istənilən ədəd üçün şərti yığılan ədədi sıranın hədlərinin yerlərini elə dəyişmək olar ki, alınan yeni sıranın cəmi həmin ədəd olsun (isbatsız).

**Mövzu № 3. Funksional sıralar**

**Funksional sıralar. Müntəzəm yığılma. Funksional sıraların müntəzəm yığılma əlamətləri.**

**Teorem (Funksional ardıcıllıqlar üçün Koşi kriteriyası).**  funksional ardıcıllığının  çoxluğunda müntəzəm yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən  üçün elə  nömrəsinin tapılmasıdır ki,  olduqda ixtiyari  natural ədədi və  çoxluğundan olan hər bir  ədədi üçün



olsun.

Fərz edək ki,  çoxluğunda təyin olunmuş  funksional ardıcıllığı verilmişdir. Bu funksional ardıcıllığın hədlərindən aşağıdakı formal cəmi düzəldək:

. (1)

(1)-ə  çoxluğunda təyin olunmuş **funksional sıra** deyilir.

Hər bir qeyd olunmuş  nöqtəsində (1) funksional sırası

 (2)

ədədi sırasını çevrilir. (2) ədədi sırası yığılan olarsa, (1)-ə  **nöqtəsində yığılan funksional sıra** deyilir.

Funksional sıralar üçün müəyyən bir çoxluqda müntəzən yığılma anlayışı da verilir. Bu anlayışı vermək üçün əvvəlcə funksional sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığı ilə tanış olmaq lazım gəlir.

****

götürməklə  çoxluğunda təyin olunmuş  funksional ardıcıllığı alınır.  funksional ardıcıllığına **(1) funksional sırasının xüsusi cəmlər ardıcıllığı** deyilir.

**Tərif.**   çoxluğunda təyin olunmuş funksional sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığı bu çoxluqdı müntəzəm yığılan olduqda həmin funksional sıraya ** çoxluğunda müntəzəm yığılan funksional sıra** deyilir.

(1) funksional sıranın  xüsusi cəmlər ardıcıllığı  çoxluğunda müntəzəm olaraq  funksiyasına yığılırsa, onda deyirlər ki, (1) funksional sırası  çoxluğunda müntəzəm olaraq  funksiyasına yığılır.  funksiyasına **funksional sıranın cəmi** deyilir. Bunu belə yazırlar:

. (3)

Funksional ardıcıllığın müntəzəm yığılmasının tərifinə görə (1) funksional sırasının  çoxluğunda  funksiyasına müntəzəm yığılması o deməkdir ki, istənilən  ədədi üçün elə  natural ədədi vardır ki,  olduqda və -in  çoxluğundan olan bütün qiymətlərində

 (4)

olur. Aşağıdakı işarəni qəbul edək:

. (5)

(4)-ə **(1) funksional sırasının -ci qalığı** deyilir. (3) və (5)-dən alınır ki,

. (6)

(6)-ya əsasən hər bir qeyd olunmuş  üçün

 (7)

olmasından

 (8)

alınır.

(4) və (5)-dən isə çıxır ki, (1) funksional sırası  çoxluğunda müntəzəm yığılan olduqda istənilən  üçün

 (9)

olur. Başqa sözlə,  çoxluğunda müntəzəm yığılan funksional sıranın -ci qalığı  çoxluğunda müntəzəm olaraq sıfra yığılır.

(6)-ya əsasən hər bir müntəzəm yığılan funksional sıranı onun -ci xüsusi cəmi ilə -ci qalığının cəmi şəklində göstərmək olar:

. (10)

Funksional sıranın müəyyən bir çoxluqda müntəzəm yığılmasından onun bu çoxluğun hər bir nöqtəsində yığılan olması alınır. Lakin bu təklifin tərsi doğru deyil. Yəni çoxluğun hər bir nöqtəsində yığılan funksional sıra bu çoxluqda müntəzəm yığılan olmaya da bilər.

**Teorem (Funksional sıralar üçün Koşi kriteriyası).**  (1) funksional sırasının  çoxluğunda müntəzəm yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən  üçün elə  natural ədədinin tapılmasıdır ki,  olduqda, hər bir natural ədədi üçün, -in  çoxluğundan olan bütün qiymətlərində

 (11)

olsun. Doğrudan da, (1) funksional sırasının  xüsusi cəmlər ardıcıllığının -də müntəzəm yığılması (1) funksional sırasının -də müntəzəm yığılması deməkdir. Funksional ardıcıllıqlar üçün Koşi kriteriyasına görə  funksional ardıcıllığının  çoxluğunda müntəzəm yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari  ədədinə görə elə  natural ədədinin tapılmasıdır ki,  olduqda, istənilən  natural ədədi və -in -dən olan bütün qiymətlərində

 (12)

olmasıdır.  olduğu üçün

 (13)

olar. (13)-ü (12)-nin sol tərəfinə nəzərə alsaq, (11) alınar. Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki,  çoxluğunda müntəzəm yığılan (1) funksional sırasının bütün hədlərini bu çoxluqda məhdud olan   funksiyasına vurmaqla alınan  funksional sırası da  çoxluğunda müntəzəm yığılandır.

Funksional sıralar üçün Veyerştras əlaməti

 çoxluğunda təyin olunmuş

 (1)

funksional sırası üçün elə müsbət hədli, yığılan

 (2)

ədədi sırası varsa ki, -in  çoxluğundan olan bütün qiymətlərində

 (3)

olur, onda (1) funksional sırası  çoxluğunda müntəzəm yığılandır.

**İsbatı.** Fərz edək ki, (1) funksional sırası üçün müsbət hədli, yığılan və (3) şərtini ödəyən (2) ədədi sırası vardır. Ədədi sıralar üçün Koşi kriteriyasına görə (2) yığılan ədədi sıra olduğundan istənilən  üçün elə  natural ədədi vardır ki,  olduqda bütün  natural ədədləri və -dən olan hər bir  üçün

 (4)

olur. Cəmin modulunun xassəsindən istifadə edərək, (3) və (4)-ə əsasən  olduqda bütün  natural ədədləri və -in  çoxluğundan olan hər bir qiyməti üçün

 (5)

şərti ödənilir. Funksional sıralar üçün Koşi kriteriyasına görə (5)-dən (1) funksional sırasının  çoxluğunda müntəzəm yığılan olduğu alınır. Teorem isbat olundu.

Funksional sıra üçün yuxarıdakı teoremin şərtini ödəyən ədədi sıra varsa, onda belə funksional sıraya **majorantlanan funksional sıra** deyilir. (3) şərtini ödəyən ədədi sıraya isə həmin **funksional sıranın majorant sırası** və ya sadəcə olaraq **funksional sıranın majorantı** deyilir.

**Mövzu № 4. Qüvvət sırası. Teylor sırası**

**Qüvvət sırası: Abelin birinci teoremi, yığılma radiusu, yığılma intervalı, yığılma radiusunun hesablanması düsturları. Teylor sırası.**

Hər bir həddi qüvvət funksiyası olan aşağıdakı funksional sıraya baxaq:

. (1)

Burada  verilmiş ədədlərdir. (1)-ə **qüvvət sırası**,  ədədlərinə isə bu **qüvvət sırasının əmsalları** deyilir.

Hər bir qüvvət sırası funksional sıra olduğu üçün funksional sıralara aid olan bütün anlayış və təkliflər qüvvət sıralarına da aiddir. Lakin qüvvət sıraları daha sadə funksional sıralar olduqları üçün onların özlərinə məxsus bəzi spesifik xassələri vardır. Məsələn, hər bir qüvvət sırası nöqtəsində yığılır. Amma elə qüvvət sıraları da vardır ki, onlar yalnız  nöqtəsində yığılırlar(məsələn,  qüvvət sırası).

**Teorem (Abel teoremi).** Qüvvət sırası sıfırdan fərqli hər hansı bir  nöqtəsində yığılandırsa, onda bu qüvvət sırası -in  şərtini ödəyən bütün qiymətlərində mütləq yığılandır. Qüvvət sırası hər hansı bir  nöqtəsində dağılandırsa, onda -in  şərtini ödəyən bütün qiymətlərində dağılandır.

**İsbatı:** Əvvəlcə fərz edək ki, (1) qüvvət sırası  nöqtəsində nöqtəsində yığılandır, yəni



ədədi sırası yığılandır. Onda ədədi sıranın yığılmasının zəruri şərtinə əsasən  olmalıdır.  ardıcıllığı yığılan olduğu üçün məhduddur. Ona görə elə  ədədi vardır ki,

 (2)

olur.

1. qüvvət sırasını aşağıdakı şəkildə yazaq:

 . (3)

(3)-ün hədlərinin modullarından düzəldilmiş aşağıdakı qüvvət sırasına baxaq:

 . (4)

(2)-yə əsasən (4)-ün hər bir həddi aşağıdakı sıranın uyğun həddini aşmır:

 . (5)

-in  şərtini ödəyən qiymətlərində  olur.  işarə etsək , (5) sırasını belə yazmaq olar:

 (6)

(6) sırasının hədləri ortaq vuruğu  olan həndəsi silsilə təşkil etdikləri üçün bu sıra yığılandır. Müsbət hədli (4) sırasının hədləri (6) sırasının uyğun hədlərini aşmadığı üçün (6)-nın yığılmasından (4)-ün yığılması çıxır. (4)-ün yığılmasından isə (1) qüvvət sırasının mütləq yığılması alınır.

İndi isə fərz edək ki, (1) qüvvət sırası müəyyən bir  nöqtəsində dağılandır. İsbat edək ki, onda bu qüvvət sırası -in  şərtini ödəyən hər bir qiymətində də dağılandır. Doğrudan da , əgər (1) qüvvət sırası  şərtini ödəyən hər hansı bir nöqtəsində yığılan olsaydı  olduğundan bu teoremin isbat etdiyimiz birinci hissəsinə görə (1) qüvvət sırası  nöqtəsində də yığılan olardı. Bu isə şərtə ziddir, çünki fərziyyəmizə görə (1) ədədi sırası  nöqtəsində dağılandır. Teorem isbat olundu.

Istənilən qüvvət sırası üçün aşağıdakı 3 haldan biri mümkündür.

**I.** Qüvvət sırası -in hər bir qiymətində yığılandır.

**II.** Qüvvət sırası  olan hər bir nöqtədə dağılandır.

**III.** Qüvvət sırası -in bəzi qiymətlərində yığılan , bəzi qiymətlərində isə dağılandır. İsbatsız olaraq qeyd edək ki, bu halda hər bir belə qüvvət sırası üçün koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olan elə bir  intervalı vardır ki, bu intervalın daxilində qüvvət sırası yığılır, xaricində isə dağılır. Belə  ədədinə **qüvvət sırasının yığılma radiusu,**  intervalına isə **qüvvət sırasının yığılma intervalı** deyilir. Yığılma intervalının  və  uclarında qüvvət sırası yığılan da ola bilər, dağılan da ola bilər.

Qüvvət sırasının yığıldığı bütün nöqtələr çoxluğuna onun yığılma oblastı deyilir. Yığılma intervalı  olan qüvvət sırasının yığılma oblastını tapmaq üçün  və  olduqda qüvvət sırasının yığılmasını tədqiq etmək lazımdır.

Bəzi hallarda müsbət hədli sıraların yığılma əlamətlərindən istifadə etməklə qüvvət sıralarının yığılma radiuslarını tapmaq olur. Aşağıda belə hallardan ikisini göstəririk.

**1) hal.** Fərz edək ki, (1) qüvvət sırasının əmsalları üçün sonlu və ya sonsuz

 (7)

limiti vardır.

1. qüvvət sırasının hədlərinin modullarından düzəldilmiş

 (8)

sırasının yığılmasını Dalamber əlamətinin limit şəkli ilə tədqiq edək. Bu əlamətə görə (8) sırası

 (9)

olduqda yığılır. (9)-dan alınır ki,  və ya  olduqda (8) sırası yığılandır. (8)-in yığılmasından (1) qüvvət sırasının mütləq yığılması çıxır.

 Beləliklə (7) limiti varsa, (1) qüvvət sırası  intervalında mütləq yığılandır. (7)-yə əsasən bu o deməkdir ki, (1)-in yığılma radiusu

 (10)

düsturu ilə təyin edilə bilər. Əgər  olarsa, onda (1) qüvvət sırası yalnız  nöqtəsində yığılır.

1. **hal.** Tutaq ki sonlu və ya sonsuz  (11)

limiti vardır. Bu halda (8) sırasının yığılmasını Koşi əlamətinin limit şəkli ilə tədqiq etmək olar. Bu əlamətə görə (8) sırası

 (12)

olduqda yığılır. (12)-dən alınır ki,

 və ya  olduqda (8) sırası yığılandır. Buradan alınır ki. (11) limiti varsa, onda (1) qüvvət sırasının yığılma radiusu  (13)

düsturu ilə təyin edilə bilər.

İsbatsız olaraq qeyd edək ki,  limiti varsa , (1) qüvvət sırasının yığılma radiusu **Koşi-Adamar düsturu**  adlanan



düsturu il təyin edilə bilər. Burada  ilə  ardıcıllığının yuxarı limiti işarə olunmuşdur. Ardıcıllığın yuxarı limiti bu ardıcıllığın limit nöqtələrindən ən böyüyünə deyilir.

**Teylor və Makloren sıraları**

Fərz edək ki, yığılma radiusu olan

 (1)

qüvvət sırası verilmişdir. (1) qüvvət sırasının  intervalındakı cəmini  ilə işarə edək:

. (2)

(2) şəkildə yazılış doğru olduqda deyirlər ki,  funksiyası  intervalında qüvvət sırasına ayrılmışdır.

Qarşıya belə bir sual çıxır.  funksiyası hansı şərt daxilində (2) şəklində olan qüvvət sırasına ayrılır və bu qüvvət sırasının əmsallarını necə tapmaq olar?

Əvvəlcə fərz edək ki,  funksiyası (2) şəklində qüvvət sırasına ayrılmışdır. Məlumdur ki, yığılma radiusu olan qüvvət sırasını -in  şərtini ödəyən bütün qiymətlərində istənilən qədər hədbəhəd diferensiallamaq olar. Bu zaman alınan yeni qüvvət sıralarının da yığılma radiusları  olur. Deməli,  funksiyası  intervalında (2) şəklində qüvvət sırasına ayrılırsa, onda  funksiyasının bu intervalda istənilən tərtibdən törəməsi vardır.

(2) şəklində qüvvət sırasına ayrılmış  funksiyası üçün  əmsallarını tapaq. Bunun üçün əvvəlcə (2)-nin hər iki tərəfində  yazaq: .

(2)-nin hər iki tərəfini diferensiallayaq:

 (3)

(3)-ün hər iki tərəfində  yazaq: 

(3)-ün hər iki tərəfini diferensiallayaq:

 (4)

(4)-ün hər iki tərəfində  yazaq: 

Prosesi bu qayda üzrə davam etdirərək, (2)-nin sağ tərəfindəki qüvvət sırasının əmsalları üçün aşağıdakı ümumi düsturu alırıq:

. (5)

**Tərif.**  funksiyası  nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuşdursa və bu ətrafda istənilən tərtibdən törəməsi vardırsa, onda əmsalları (5) düsturu ilə təyin olunan

 (6)

qüvvət sırasına  funksiyasının **Makleron sırası** deyilir. Oxşar qayda ilə



qüvvət sırasına baxıb, bu sıranın  yığılma intervalındakı cəmini  ilə işarə etsək,

 (7)

yazılışı doğru olduqda deyirlər ki,  funksiyası bu intervalda (7) şəklində qüvvət sırasına ayrılmışdır.

Bu halda (7)-də və onu ardıcıl olaraq diferensiallamaqla alınan bərabərliklərdə  yazmaqla (7)-nin sağ tərəfindəki qüvvət sırasının əmsalları üçün

 (8)

düsturu alınır.

**Tərif.**  funksiyası  nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuşdursa və bu ətrafda istənilən tərtibdən törəmələrə malikdirsə , onda əmsalları (8) düsturu ilə təyin olunan

 (9)

qüvvət sırasına  funksiyasının **Teylor** **sırası** deyilir.

Qeyd edək ki, (6) Makloren sırası (9) Teylor sırasının  olan xüsusi halıdır.

İndi isə  nöqtəsinin müəyyən ətrafında istənilən tərtibdən törəməsi olan  funksiyasının (9) şəklində Teylor sırasına ayrıla bilmə şərtlərini tapaq. Bunun üçün əvvəlcə  funksiyasının nöqtəsi ətrafında Teylor düsturu üzrə ayrılışını yazaq (bu kitabın I hissəsində II fəsil , §25-ə bax!).

 (10)

Burada  qalıq həddidir və onun Laqranj şəklində yazılışı belədir:

 (11)

Aydındır ki, (9) Teylor sırasının -ci xüsusi cəmi

 (12)

düsturu ilə təyin edilir.(12)-yə əsasən (10)-u belə yazmaq olar:

 (13)

Fərz edək ki,  nöqtəsinin müəyyən ətrafında (11)ilə təyin olunan  funksiyası üçün

 (14)

şərti ödənilir. Onda  şərtində (13) bərabərliyinin hər iki tərəfində limitə keçsək (14)-ə əsasən

 (15)

alınar.

**Teorem.** Əgər  funksiyasının  intervalında istənilən tərtibdən törəməsi varsa və -in  intervalında olan bütün qiymətlərində (14) şərti ödənilirsə, onda  funksiyası həmin intervalda (15) şəklində olan Teylor sırasına ayrılır.

**Mövzu № 5. Furye sırası**

**Furye sırası.**

 ədədlər olduqda



 (1)

şəklindəki funksional sıraya **triqonometrik sıra** deyilir.  ədədlərinə **triqonometrik sıranın əmsalları** deyilir.

 və  funksiyaları  dövrünə malik dövri funksiyalar olduqları üçün (1) triqonometrik sırası yığılan olduqda onun cəmi də  dövrlü funksiya olacaqdır. Yəni

 (2)

olduqda  funksiyası  şərtini ödəyəcəkdir.

İndi isə fərz edək ki,  dövrünə malik periodik  funksiyası verilmişdir. Qarşıya belə bir sual çıxır ki,  funksiyası əlavə hansı şərtləri ödədikdə bu funksiyaya yığılan triqonometrik Furye sırası vardır və həmin sıranın əmsallarını necə tapmaq olar?

Fərz edək ki,  dövrlü funksiyası  parçasında (2) şəklində triqonometrik sıraya ayrılmışdır. Aydındır ki, müsbət hədli

 (3)

ədədi sırası (1) funksional sırasının majorantıdır. Fərz edək ki, (3) ədədi sırası yığılandır. Onda məlum teoremə görə (bu fəsildə §11, teorem2-yə bax!) (1) funksional sırası  intervalında müntəzəm yığılandır. Funksional sıraların hədbəhəd inteqrallanması haqqındakı teoremə görə (bu fəsildə §13, teorem1-ə bax!) (2) bərabərliyinin hər iki tərəfini  parçası üzrə inteqrallamaq olar.

. (4)

(4)-ün sağ tərəfindəki inteqralları hesablayaq:





Bunları (4)-də nəzərə alsaq,

 (5)

olar.

Beləliklə ,  dövrlü  funksiyası (2) şəklində triqonometrik sıraya ayrılırsa, onda  əmsalı (5) düsturu ilə tapıla bilər. O biri  əmsallarını tapmaq üçün (2) bərabərliyinin hər iki tərəfini əvvəlcə  funksiyalarına vuraq:

 (6 )

Aydındır ki, (3) ədədi sırası (6) funksional sırasının da majorantıdır. Fərziyyəmizə görə (3) ədədi sırası yığılan olduğu üçün (6) funksional sırası  parçasında müntəzəm yığılandır. Ona görə (6) bərabərliklərinin hər iki tərəfini aşağıdakı kimi inteqrallamaq olar:

 (7)

(7)-də  olduqda





bərabərliklərini nəzərən aldıqda  olur.

(7)-də  olduqda isə bu bərabərliyin sağ tərəfində yalnız  əmsalı iştirak edən inteqral sıfırdan fərqli olur. Doğrudan da  götürüldükdə





alınır. Ona görə də  olduqda (7) aşağıdakı şəklə düşür:

 (8)

 olduğu üçün (5) və (8) düsturlarını aşağıdakı bir düstur ilə vermək olar:

 (9)

Deməli,  funksiyası  parçasında (2) şəklində triqonometrik sıraya ayrılırsa, onun  əmsallarını (9) düsturu ilə təyin etmək olar.

Oxşar qayda ilə (2) bərabərliyinin hər iki tərəfini  funksiyalarına vurub alınan bərabərliklərin hər iki tərəfini inteqrallamaqla  əmsalları üçün

 (10)

düsturunun doğru olduğunu göstərmək olar (**bunu özünüz sərbəst edin!**).

(9), (10) düsturları ilə təyin olunan ədədlərə  funksiyasının **Furye əmsalları**, belə əmsallara malik olan (1) triqonometrik sırasına isə  funksiyasının **Furye sırası** deyilir.

Beləliklə, biz göstərdik ki,  funksiyası (1) şəklində Furye sırasına ayrılırsa, onun Furye əmsallarının (5) ,(8) ,(9) düsturları ilə təyin etmək olar. İndi isə yuxarıda qoyulan sualın o biri hissəsinə qayıdaq.  funksiyası hansı şərtləri ödəməlidir ki, onun Furye sırası  parçasının hər bir nöqtəsində bu funksiyaya yığılsın.

Müəyyən edilmişdir ki, elə kəsilməyən funksiyalar vardır ki, onların triqonometrik Furye sıraları  parçasınınn müəyyən nöqtəsində və ya sonsuz sayda nöqtələrində dağılır. Deməli, funksiya üzərinə qoyulan yalnız kəsilməzlik şərti bu funksiyanın triqonometrik Furye sırasının yığılmasını təmin etmir. Furye sırasının yığılmasını təmin etmək üçün funksiya kəsilməzlikdən başqa bir sıra əlavə şərtləri də ödəməlidir. Bu sahədə böyük rus riyaziyyatçıları Н.Н.Лузинин, A.H.Kolmoqorovun və isveç riyaziyyatçısı L.Karlesonun mühüm tədqiqatları vardır.Lakin bu tədqiqatlar ilə bağlı olan bir sıra anlayışlar ali riyaziyyat kursundan kənara çıxdıqları üçün həmin tədqiqatlar üzərində dayanmırıq. Yalnız onu qeyd edək ki, hazırda verilmiş funksiyanın Furye sırasının yığılmasını təmin edən çoxlu sayda təkliflər vardır. Biz onlardan ən sadələrindən ikisini göstərməklə kifayətlənəcəyik.

Əvvəlcə aşağıdakı anlayış ilə tanış olaq.

**Tərif.**  parçasını sonlu sayda  nöqtələri ilə elə  intervallarına bölmək olarsa ki,  funksiyası bu intervalların hər birində monoton olsun, onda  funksiyasına **hissə-hissə monoton funksiya** deyilir.

Qeyd edək ki,  funksiyası  parçasında hissə-hissə monoton və məhduddursa , onda  funksiyasının bu parçada yalnız birinci növ kəısilmə nöqtələri ola bilər.

Aşağıdakı təklif doğrudur.

**Teorem 1.** Əgər  dövrlü periodik  funksiyası  parçasında hissə-hissə monoton və məhduddursa, onda bu funksiyanın Furye sırası bütün nöqtələrdə yığılandır.  funksiyasının kəsilməyən olduğu hər bir nöqtədə onun Furye sırasının cəmi olan  -in qiyməti -in həmin nöqtədəki qiymətinə bərabərdir.  funksiyasının hər bir  kəsilmə nöqtəsində isə -in qiyməti



düsturu ilə təyin edilir (isbatsız).

Furye sırasının yığılmasına aid ikinci təklifi vermək üçün əvvəlcə aşağıdakı anlayışı verək.

**Tərif.**  funksiyasının  parçasında sonlu sayda nöqtələr müstəsna olmaqla hər yerdə kəsilməyən  törəməsi varsa, bu nöqtələrdə isə  -in sonlu sol və sağ limit qiymətləri varsa, onda deyirlər ki,  funksiyası  parçasında hissə-hissə kəsilməyən törəməyə malikdir.

Aşağıdakı təklif doğrudur.

**Teorem2.**  funksiyası  parçasında kəsilməyən olub, bu parçada hissə-hissə kəsilməyən törəməyə malikdirsə və  şərtini ödəyirsə, onda  funksiyasının triqonometrik Furye sırası  parçasında müntəzəm olaraq  funksiyasına yığılır. Bundan əlavə  funksiyasının triqonometrik Furye sırasının hədlərinin modullarından düzəldilmiş sıra da  parçasında müntəzəm olaraq yığılır (isbatsız).

Bu teoremin isbatına В.А.Илъин, Э.Г.Позняк, «Основы математического анализа», II частъ, Москво-1973 kitabında səhifə 321-də baxmaq olar.

Qeyd edək ki, tək və cüt funksiyaların triqonometrik Furye sıraları daha sadə şəkildə olurlar. Tək və cüt funksiyaların triqonometrik Furye sıralarına keçməmişdən əvvəl aşağıdakı iki faktı göstərək.

**1.**  istənilən cüt funksiya olduqda

 (11)

düsturu doğrudur. Doğrudan da,  cüt funksiya olduqda  şərtinə əsasən



olduğu alınır.

**2.**  istənilən tək funksiya olduqda

 (12)

bərabərliyi doğrudur. Doğrudan da  tək funksiya olduqda  şərtinə əsasən alırıq:



İndi isə  tək funksiya olduqda onun triqonometrik Furye sırasının nə şəklə düşəcəyini aydınlaşdıraq.Aydındır ki,  tək funksiya olduqda  funksiyaları da tək funksiyalardır. Ona görə (9) düsturundan və (12)–dən

 (13)

olduğu alınır.  tək funksiya olduqda  funksiyaları cüt funksiyalardır.(10) düsturundan və (11)-dən alınır ki,

 . (14)

(13 ) və (14) –dən alınır ki, tək funksiyanın triqonometrik Furye sırası yalnız sinuslardan ibarət olub

 (15)

şəklindədir. Buradakı  əmsalları (14) düsturu ilə təyin olunurlar.

Fərz edək ki,  cüt funksiyadır.Onda aydındır ki,  funksiyaları da cüt fünksiyalarıdır. (9) və (11) düsturlarına əsasən

 (16)

olduğu alınır.  cüt funksiya olduqda  funksiyaları tək funksiyalardır. Ona görə (10) düsturuna və (12)-yə əsasən

 (17)

olduğu alınır.

(16) və (17) düsturlarından alınır ki, cüt funksiyanın triqonometrik Furye sırası yalnız kosinuslardan ibarət olub aşağıdakı şəkildə olurlar:

 (18)

Buradakı  əmsalları (16) düsturu ilə təyin edilirlər.

İndiyə kimi yalnız  dövrlü periodik funksiyalara baxıldı. İndi isə fərz edək ki,  funksiyası -dən fərqli olan  dövrünə malikdir. Bu halda

 (19)

düsturu üzrə əvəzləmə aparmaqla alınan  funksiyası  dəyişənin  dövrlü periodik funksiya olacaqdır. Ona görə də  funksiyasını  parçasında aşağıdakı şəkildə triqonometrik Furye sırasına ayırmaq olar:

 (20)

(9), (10) düsturlarına əsasən buradakı  əmsalları aşağıdakı düsturlar ilə təyin olunurlar.

 (21)

 . (22)

(19) düsturundan istifadə edərək əvvəlki dəyişəninə qayıtsaq, ,  olduğu üçün (21), (22) düsturları





şəklinə düşürlər. (20)-yə əsasən dövrünə malik olan  funksiyasının triqonometrik Furye sırası



şəklində yazılır.

Qeyd edək ki,  dövrünə malik olan funksiyaların triqonometrik Furye sıralarına aid olan təkliflər dövrlü funksiyaların triqonometrik funksiyaları üçün də doğrudurlar.

Periodik olmayan bəzi funksiyaları da triqonometrik Furye sıralarına ayırmaq mümkündür.Fərz edək ki,  parçasında hissə-hissə monoton olan  funksiyası verilmişdir.  şərtini ödəyən hər hansı  ədədini götürək. Bütün həqiqi oxda təyin olunmuş, 2 dövrünə malik, hissə-hissə monoton olan elə  funksiyası quraq ki, bu funksiya  parçasında  funksiyası ilə üst-üstə düşsün (şəkil1-ə bax!).

Şəkil 1

*x*





*b*

*a*



0





*y*

Aydındır ki, belə  funksiyasını triqonometrik Furye sırasına ayırmaq olar. Bu triqonometrik Furye sırasının cəmi parçasında  funksiyasının kəsilmə nöqtələrindən (əgər varsa) fərqli olan bütün nöqtələrində  funksiyası ilə üst-üstə düşür. Bu qayda ilə periodik olmayan, hissə-hissə hamar olan hər bir  funksiyasını  parçasında triqonometrik Furye sırasına ayırmaq olar.



*x*

*y*

0

-*l*

*l*

Şəkil 2

Tutaq ki,  parçasında verilmiş hissə-hissə monoton olan  funksiyası verilmişdir.  olduqda  götürməklə  funksiyasını  parçasında təyin edək (şəkil 2). Bu halda deyirlər ki,  funksiyası cüt funksiya kimi davam etdirilmişdir.  parçasında təyin edilən bu funksiya yalnız kosinuslardan ibarət olan triqonometrik Furye sırasına ayrılır.

 parçasında verilmiş hissə-hissə monoton olan  funksiyası üçün  olduqda  götürməklə bu funksiyanı  parçasına tək funksiya kimi də davam etdirmək olar (şəkil 3). Bu halda  parçasında təyin edilmiş yeni funksiya yalnız sinuslardan ibarət olan triqonometrik Furye sırasına ayrılır.

*x*

*y*

0

Şəkil 3

**Misal 1. ** dövrlü periodik funksiya  ,  düsturu ilə verilmişdir. Onun triqonometrik Furye sırasına ayrılışını yazın.

**Həlli.** Verilən funksiya hissə-hissə monoton və məhduddur (şəkil 4). Teorem 1-ə görə bu funksiya triqonometrik Furye sırasına ayrılır. (9) düsturuna əsasən alırıq:

*x*

*y*

-



3

2

4

5

-3

-2

-4

-5

Şəkil 4

0





(10) düsturu ilə  əmsallarını tapaq:





 və  üçün aldığımız qiymətləri



bərabərliyində yerlərinə yazaraq,



ayrılışını alırıq. Bu ayrılış kəsilmə nöqtələrindən fərqli olan bütün nöqtələrdə doğrudur.

Qeyd edək ki, verilən funksiya tək olduğu üçün əvvəlcədən onun triqonometrik Furye sırasının sinuslardan ibarət olduğuna əsasən yalnız  əmsallarını, həm də (14) düsturu ilə hesablamaq olardı.

**Misal 2.** ,  düsturu ilə verilmiş  dövrlü periodik funksiyanın triqonometrik Furye sırasına ayrılışını yazın.

**Həlli.** Verilən funksiya cüt funksiya olduğundan onun triqonometrik Furye sırası yalnız kosinuslardan ibarətdir:



Buradakı  əmsallarını (16) düsturu ilə tapmaq olar:





Beləliklə,



olduğu üçün  funksiyasının triqonometrik Furye sırasına ayrılışı





şəklindədir. Verilən funksiya hissə-hissə monoton, məhdud və kəsilməyən olduğundan (şəkil 5) bu ayrılış -in bütün qiymətlərində doğrudur.

*y*

-



3

2

-3

-2

Şəkil 5

0

*x*

 funksiyası üçün aldığımız triqonometrik Furye sırasından istifadə edərək,  ədədi sırasının cəmini tapmaq olar. Doğrudan da bu ayrılış düsturunda  yazdıqda  tək ədəd olduqda ,  cüt ədəd olduqda isə  olduğu üçün





alınır.

**Misal 3.**  dövrlü funksiyası



düsturu ilə verilmişdir. Bu funksiyanın triqonometrik Furye sırasını yazın.

*y*

-



3

2

-3

-2

Şəkil 6

0

*x*

Bu funksiya hissə-hissə monoton və məhdud funksiyadır.  nöqtələrində kəsilməyə malikdir. (9), (10) düsturları ilə  və  əmsallarını tapaq.





**** tək ədəd olduqda  olduğu üçün

****

alınır. İndi isə  əmsallarını tapaq:





Beləlikə, verilən funksiyanın triqonometrik Furye sırası



şəklindədir. Bu sıranın cəminin  funksiyasının kəsilmə nöqtələrindəki qiyməti -in həmin nöqtələrdəki sağ və sol limit qiymətlərinin ədədi ortasına bərabərdir. Məsələn,  kəsilmə nöqtəsidir. Şəkil 6-dan aydındır ki,  Onda 

 alınır. Burada  ilə aldığımız triqonometrik Furye sırasının cəmi işarə olunmuşdur.

Bu misalda verilən funksiyanın triqonometrik Furye sırasına ayrılış düsturundan istifadə edərək  ədədi sırasının cəmini tapmaq olar. Doğrudan da, bu düsturda  yazaq:



**Mövzu № 6. Çoxdəyişənli funksiyanın limiti**

**Rm fəzası. Rm fəzasında yığılma. Çoxdəyişənli funksiyanın limiti**

*m-* **dəyişənli funksiya anlayışı. Çoxdəyişənli funksiyanın limiti və kəsilməzliyi**

Fərz edək ki, *m* – ölçülü  Evklid fəzasında müəyyən bir  çoxluğu verilmişdir. Əgər  çoxluğundan olan hər bir  nöqtəsinə müəyyən bir qayda ilə hər hansı bir  ədədi qarşı qoyulmuşdursa, onda deyirlər ki,  çoxluğunda  **funksiyası** verilmişdir. Hər bir  nöqtəsi *m* dənə  koordinatları ilə təyin olunduğu üçün bu funksiyaya ***m*** **– dəyişənli funksiya** deyilir və  kimi işarə olunur.

Əgər 1,2,…,*n*,… natural ədədlərindən hər birinə -dən olan müəyyən

,… (1)

nöqtələri qarşı qoyulmuşlarsa, onda deyirlər ki, **-də** (1) **nöqtələr ardıcıllığı** verilmişdir. (1)-i qısa olaraq  kimi işarə edirlər.

**Tərif.** -dən olan  nöqtələr ardıcıllığı üçün -dən olan elə bir *A* nöqtəsi varsa ki, istənilən  ədədi üçün elə bir  nömrəsi tapmaq olarsa ki,  olduqda

 (2)

olsun, onda deyirlər ki, **-də  nöqtələr ardıcıllığı *A* nöqtəsinə yığılır** və bunu belə yazırlar:

.

Əgər -dən olan hər bir  nöqtəsinin koordinatlarını  ilə, *A*-nın koordinatlarını isə  ilə işarə etsək, (2)-ni koordinatlar ilə belə ifadə etmək olar:



 (3)

Sonuncu münasibətlər göstərir ki, *m* dənə  ədədi ardıcıllıqları uyğun olaraq  ədədlərinə yığılırlar. Bu təklifin tərsi də doğrudur.

İndi isə -dəki  çoxluğunda təyin olunmuş  funksiyasına baxaq. *A* isə -dən olan elə bir nöqtə olsun ki, bu nöqtənin istənilən ətrafında  çoxluğunun *A-*dan fərqli heç olmazsa bir dənə nöqtəsi olsun.

**Tərif.** Əgər  çoxluğundan elementləri *A*-dan fərqli olub, *A-*ya yığılan  nöqtələr ardıcıllığına uyğun olan  ədədi ardıcıllığı *b* ədədinə yığılarsa, *b* ədədinə  **funksiyasının *A* nöqtəsindəki limit** qiyməti deyilir.

Bu çoxdəyişənli funksiyanın limitinin **«Heyne mənada»** **tərifi**dir. Bu tərifi **«ε - δ dilində»** belə ifadə etmək olar.

**Tərif.** *b* ədədinə o zaman  funksiyasının *A* nöqtəsindəki limiti deyilir ki, istənilən  üçün elə  ədədi göstərmək olsun ki, funksiyanın *A* nöqtəsinin ətrafından olub,  şərtini ödəyən bütün nöqtələr üçün  olsun.  funksiyasının *A* nöqtəsindəki limiti üçün



və ya



işarələrindən istifadə olunur.

 funksiyası və *A* nöqtəsi üçün istənilən  ədədinə görə elə  ədədi tapılarsa ki, ,  şərtlərini ödəyən istənilən iki  və  nöqtələri üçün



olsun, onda deyirlər ki,  funksiyası *A* nöqtəsində **Koşi şərtini** ödəyir.

**Teorem (Koşi kriteriyası).**  funksiyasının *A* nöqtəsində sonlu limitinin olması üçün zəruri və kafi şərt onun bu nöqtədə Koşi şərtini ödəməsidir (isbatsız).

**Tərif.**

 (4)

olarsa,  funksiyasına ***A* nöqtəsində kəsilməyən funksiya** deyilir. (4) şərtinin ödənilmədiyi nöqtələrə bu funksiyanın **kəsilmə nöqtələri** deyilir.

Fərz edək ki,  qeyd olunmuş nöqtə,  isə ixtiyari bir nöqtədir.

**Tərif.**

 (5)

düsturu ilə təyin olunan  funksiyasına  **funksiyasının *A* nöqtəsindəki tam artımı** deyilir.



işarə edək.

Buradan



alınır. Ona görə də (5)-i belə yazmaq olar:

. (6)

(4) və (6)-dan alınır ki,  funksiyanın *A* nöqtəsində kəsilməyən olması üçün zəruri və kafi şərt



bərabərliyinin ödənilməsidir.

**Tərif.**



düsturu ilə təyin olunan  funksiyasına  funksiyasının *A* nöqtəsində ** arqumentinə nəzərən xüsusi artım**ıdeyilir.

Oxşar qayda ilə *A* nöqtəsində başqa arqumentlərə nəzərən xüsusi artımlar təyin edirlər.

**Tərif.** Əgər



olarsa, onda  funksiyasına  nöqtəsində  dəyişəninə nəzərən kəsilməyən funksiya deyilir.

Aydındır ki, funksiyanın nöqtədə kəsilməyən olmasından onun bu nöqtədə  dəyişənlərindən hər birinə nəzərən kəsilməzliyi çıxır. Bu təklifin tərsi ümumiyyətlə doğru deyil. Yəni çoxdəyişənli funksiyanın verilmiş nöqtədə dəyişənlərdən hər birinə nəzərən kəsilməzliyindən bu funksiyanın həmin nöqtədə kəsilməyən olması çıxmır.

Aşağıdakı funksiyaya baxaq:



Bu düstur ilə təyin olunan funksiya (0, 0) nöqtəsində dəyişənlərdən hər birinə nəzərən kəsilməyəndir.

Doğrudan da,



Oxşar qayda ilə  olduğu göstərilir. Beləliklə, bu funksiya koordinat oxları üzərində  nöqtəsində kəsilməyəndir. Lakin bu funksiya koordinat başlanğıcından keçən qalan düz xətlər üzərində  nöqtəsində kəsilməyən deyil. Doğrudan da, hər bir belə düz xətt  düsturu ilə verilə bilər. Belə düz xətlər üzərində bu funksiyanın qiyməti sabitdir:

.

Ona görə də bu funksiyanın hər bir belə düz xətt üzərində  nöqtəsindən fərqli və bu nöqtəyə yığılan  nöqtələr ardıcıllığına uyğun qiymətlər ardıcıllığı stasionar ardıcıllıqdır və  ədədinə yığılır.  olduğu üçün . Deməli, funksiyanın  nöqtəsindəki limit qiyməti onun bu nöqtədəki xüsusi qiymətindən fərqlidir. Bu isə onu göstərir ki,  nöqtəsində kəsiləndir.

Çoxdəyişənli kəsilməyən funksiyalar birdəyişənli kəsilməyən funksiyaların malik olduğu oxşar xassələrə malikdirlər.

**Teorem 1.**  və  funksiyaları *A* nöqtəsində kəsilməyəndirsə, onda , ,   funksiyaları da *A* nöqtəsində kəsilməyəndirlər.

**Teorem 2.** Əgər  funksiyası *A* nöqtəsində kəsilməyəndirsə və  olarsa, onda *A* nöqtəsinin elə  - ətrafı vardır ki, bu ətrafda  və -in işarəsi -nın işarəsi ilə eynidir.

**Teorem 3.** Qapalı məhdud çoxluqda kəsilməyən  funksiyası həmin çoxluqda məhduddur.

**Teorem 4.** Qapalı məhdud çoxluqda kəsilməyən  funksiyası həmin çoxluqda özünün dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədlərini alır.

**Teorem 5.** Qapalı məhdud çoxluqda kəsilməyən funksiya həmin çoxluqda müntəzəm kəsilməyəndir.

**Mövzu № 7. Xüsusi törəmələr**

**Funksiyanın xüsusi törəmələri və diferensialı. İstiqamət üzrə törəmə. Qradient.**

**Çoxdəyişənli funksiyanın xüsusi törəmələri**

Fərz edək ki, *M*() nöqtəsi  funksiyasının təyin oblastına daxil olan ixtiyari qeyd olunmuş nöqtədir. Bu nöqtədəki  xüsusi artımının uyğun  arqument artımına nisbətinə baxaq:



.(1)

**Tərif.**  şərtində (1) nisbətinin sonlu limiti varsa, bu limitə  funksiyasının *M*() nöqtəsində ** arqumentinə nəzərən birinci tərtib xüsusi törəməsi** deyilir və



simvollarından biri ilə işarə olunur.

Qeyd edək ki, çoxdəyişənli funksiyanın bir arqumentə nəzərən xüsusi törəməsi hesablanarkən o biri arqumentlərə sabitlər kimi baxılır.

**Misal. **



Çoxdəyişənli funksiyanın verilmiş nöqtədə bütün xüsusi törəmələrinin varlığından bu funksiyanın həmin nöqtədə kəsilməzliyi çıxmır. Biz əvvəlki mövzuda göstərmişdik ki,



düsturu ilə təyin olunan funksiya  nöqtəsində kəsiləndir. Lakin bu nöqtədə həmin funksiyanın həm *x*-ə, həm də *y*-ə nəzərən xüsusi törəmələri vardır. Doğrudan da,



olduğu üçün

.

Eyni qayda ilə



olduğu alınır.

Çoxdəyişənli funksiyasının yüksək tərtibli xüsusi törəmələrindən də danışmaq olar.

Sadəlik xatirinə yüksək tərtibli xüsusi törəmə anlayışını ikidəyişənli  funksiyası üçün verək. Məlumdur ki,

.

Ola bilər ki,  funksiyalarının da *x* və *y*-ə nəzərən xüsusi törəmələri olsun.  funksiyasının *x*-ə nəzərən xüsusi törəməsi varsa, bu xüsusi törəməyə  funksiyasının ***x*-ə nəzərən ikinci tərtib xüsusi törəməsi** deyilir və



simvollarından biri ilə işarə olunur.

Oxşar qayda ilə  funksiyasının o biri xüsusi törəmələri təyin edilirlər:

.

Qeyd edək ki, ümumiyyətlə desək, 

 törəmələrinə **qarışıq xüsusi törəmələr** deyilir. Əgər bu qarışıq törəmələr hər ikisi kəsilməyəndirlərsə, onda onlar bərabərdirlər.

Fərz edək ki, bizə *m*-dəyişənli  funksiyası verilmişdir və bu *m* dəyişənlərin hamısı eyni bir *t* dəyişəninin funksiyalarıdır:

.

Əgər  funksiyalarının hamısı diferesiallanan funksiyalardırsa, onda ***t* dəyişəninin** **mürəkkəb funksiyası** olan  funksiyasının *t*-yə nəzərən törəməsi



düsturu ilə tapılır.

**Çoxdəyişənli funksiyanın diferensiallanması anlaıyışı**

Məlum olduğu kimi, *m*-dəyişənli  funksiyasının qeyd olunmuş *M* nöqtəsindəki tam artımı



düsturu ilə təyin edilir.

**Tərif.**  funksiyasının *M* nöqtəsindəki tam artımını

(1)

şəklində göstərmək mümkün olarsa, onda  funksiyasına *M* nöqtəsində **diferensiallanan funksiya** deyilir. Burada  - müəyyən ədədlər,  isə  dəyişənlərinin sonsuz kiçilən funksiyalarıdır:

. (2)

*G* oblastının bütün nöqtələrində diferensiallanan funksiyaya bu **oblastda diferensiallanan funksiya** deyilir.

**Teorem 1.** Nöqtədə diferensiallanan funksiya həmin nöqtədə kəsilməyəndir.

**İsbatı.** Fərz edək ki,  funksiyası *M* nöqtəsində diferensiallanandır. Onda (1) doğrudur. (2)-ni nəzərə alaraq  şərtində (1)-də limitə keçək:

.

Sonuncu bərabərlik çoxdəyişənli funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinin artım mənada tərifini ifadə edir.

Teorem isbat olundu.

**Teorem 2.** Verilmiş nöqtədə diferensiallanan çoxdəyişənli funksiyanın həmin nöqtədə bütün dəyişənlərə nəzərən birinci tərtib xüsusi törəmələri vardır.

**İsbatı.** Sadəlik xatirinə teoremi 2-dəyişənli funksiya üçün isbat edəcəyik. Fərz edək ki, 2–dəyişənli  funksiyası qeyd olunmuş  nöqtəsində diferensiallanandır. Onda onun bu nöqtədəki  tam artımını

 (3)

şəklində göstərmək olar. Burada *A*,*B* – müəyyən ədədlər,  - isə -in sonsuz kiçilən funksiyalarıdır:

. (4)

 olduqda *x*-ə nəzərən  xüsusi artımı alınır və (3) aşağıdakı şəklə düşür:

. (5)

(5)-in hər iki tərəfinə -ə bölüb, (4) şərtini nəzərə almaqla limitə keçək:

.

Oxşar qayda ilə  olduğu isbat olunur.

Teorem 2 isbat olundu.

Bu teoremdən çıxır ki,  və  xüsusi törəmələrin heç olmazsa birinin olmadığı nöqtədə  funksiyası diferensiallanan deyil. Lakin müəyyən bir nöqtədə ,  xüsusi törəmələrinin hər ikisinin olmasından bu funksiyanın həmin nöqtədə diferensiallanan olması çıxmır. Məsələn,



düsturu ilə təyin olunan funksiyanın (0,0) nöqtəsində hər iki xüsusi törəmələri vardır . Lakin bu funksiya (0,0) nöqtəsində diferensiallanan deyil.

**İkidəyişənli funksiyanın diferensiallanmasının həndəsi mənası**

Əvvəlcə  ikidəyişənli funksiyasının qrafikinin həndəsi təsvirini verək. Fərz edək ki, bu funksiya *G* oblastında təyin olunmuşdur. Onda bu **funksiyanın qrafiki** dedikdə 3-ölçülü koordinat fəzasındakı  şəkilli bütün nöqtələr çoxluğu nəzərdə tutulur. Belə nöqtələr çoxluğunu təsvir etmək üçün  müstəvisi üzərindəki *G* oblastında yerləşən hər bir nöqtədən bu müstəviyə  hündürlüklü perpendikulyar ( olduqda -in müsbət istiqamətində,  olduqda -in mənfi istiqamətində) qaldırılır. Bütün belə perpendikulyarların uc nöqtələri çoxluğu -in *G* oblastındakı qrafikini təsvir edir. Bir çox sadə hallarda 2-dəyişənli funksiyanın qrafiki müəyyən bir səth ilə təsvir olunur. Bu səthin  müstə-visinə proyeksiyası *G* oblastını verir.

*х*

*у*













0



















*х0*

İndi isə səthə toxunan müstəvi anlayışını verək. Səth ilə  ortaq nöqtəsinə malik olan müstəviyə o zaman bu **səthə toxunan müstəvi** deyilir ki, səthin ixtiyari  nöqtəsi ilə  nöqtəsindən keçən  düz xətti ilə bu müstəvi arasındakı bucaq,  nöqtəsi səth üzrə -a yaxınlaşdıqda sıfra yaxınlaşsın.

Fərz edək ki,  funksiyası  nöqtəsində diferensiallanandır. Göstərək ki, həndəsi olaraq bu o deməkdir ki,  funksiyasının qrafiki olan  səthinin  nöqtəsində () toxunan müstəvisi vardır.



işarə edək. Şərtə görə  funksiyası  nöqtəsində diferensiallanan olduğu üçün yaza bilərik:

, (1)

burada

. (2)

Aşağıdakı tənliyə baxaq:

. (3)

Aydındır ki, (3) tənliyi  nöqtəsindən keçən və  normal vektoruna malik olan müstəvisinin tənliyidir. İsbat edək ki,  müstəvisi  səthinə  nöqtəsində toxunan müstəvidir. Bunun üçün göstərmək lazımdır ki,  səthi üzərindəki ixtiyari  nöqtəsi  səthi üzrə  nöqtəsinə yaxınlaşdıqda  vektoru ilə (3) tənliyi ilə verilən  müstəvisi arasındakı bucaq  yaxınlaşır. Bunun üçün həmin şərt daxilində  ilə  arasındakı bucağın -yə yaxınlaşdığını göstərmək kifayətdir.  ilə  arasındakı  bucağının kosinusunu aşağıdakı düsturdan tapmaq olar:

. (4)

(1)-ə əsasən

. (5)

(5)-i (4)-də nəzərə alaq:

. (6)

Aşağıdakı işarəni qəbul edək: . (6)-nın sağ tərəfindəki kəsrin sürət və məxrəcini -ya bölək:

. (7)

 ilə  müstəvisi arasındakı bucağı  ilə işarə edək. Şəkildən aydındır ki, . Ona görə . Bunu (7)-nin sağ tərəfində nəzərə alaq:

. (8)

Aydındır ki,

.

Bunu (8)-də nəzərə alaq:

. (9)

 nöqtəsi səth üzrə  yaxınlaşdıqda  və . Buradan və (2)-dən alınır ki,  səth üzrə  yaxınlaşdıqda  və  sıfra çevrilirlər. Onda (9)-dan alınır ki,  səth üzrə yaxınlaşdıqda .

Məlumdur ki, . Bunları (3)-də yerlərinə yazdıqda alırıq ki,  funksiyasının qrafiki olan  səthinə  nöqtəsində **toxunan müstəvinin** **tənliyi**



şəklindədir.

**Çoxdəyişənli funksiyanın tam diferensialları**

Fərz edək ki, *m* dəyişənli  funksiyası qeyd olunmuş  nöqtəsində diferensiallanandır. Onda onun bu nöqtədəki tam artımını

 (1)

şəklində göstərmək olar. Burada 

 (2)

bərabərliklərindən təyin olunan ədədlər,  isə  dəyişənlərinin sonsuz kiçilən funksiyalarıdır:

.

**Tərif.** (1)-in sağ tərəfinin xətti baş hissəsinə  funksiyasının *M* nöqtəsindəki **tam diferensialı** deyilir və  ilə işarə olunur.

Tərifə əsasən

. (3)

(3)-də  yazıb, (2)-ni nəzərə alaq:

. (4)

2-dəyişənli  funksiyası üçün (4) tam diferensial düsturu belə yazılır:

. (5)

Qeyd edək ki, (4) və (5) düsturları ilə təyin olunan tam diferensiallara birinci tərtib tam diferensiallar deyilir. Yüksək tərtibli tam diferensiallardan da danışmaq olar.

**Mövzu № 8. Yüksək tərtib xüsusi törəmələr**

**Yüksək tərtib xüsusi törəmələr və diferensial. Qarışıq törəmələrin bərabərliyi haqqında Şvars teoremi.**

Sadəlik xatirinə yüksək tərtibli diferesialları yalnız 2-dəyişənli funksiyalar üçün veririk.

Əgər 2-dəyişənli  funksiyasının birinci tərtib tam diferensialı özü də diferensiallanan funksiya olarsa, onun tam diferensialına  funksiyasının 2-ci tərtib tam diferensialı deyilir və  ilə işarə olunur. 2-ci tərtib tam diferensial

 (6)

düsturu ilə təyin edilir. Daha yüksək tərtibli tam diferensialları yazmaq üçün **diferensial simvolu** adlanan



işarəsindən istifadə olunur. ***n*-tərtibli tam diferensial**

 (7)

düsturu ilə təyin edilir. Məsələn,  olduqda (7)-dən alırıq:



**İstiqamət üzrə törəmə. Qradiyent**

3-ölçülü koordinat fəzasında vahid uzunluqlu  vektorunu götürək. Məlumdur ki, bu vektorun  oxları ilə əmələ gətirdiyi bucaqlar  olduqda, onun koordinatları  olur.

Qeyd olunmuş  nöqtəsi götürək və bu nöqtədən keçib, -ə paralel olan düz xəttin tənliyini yazaq:

. (1)

Burada  ilə bu düz xətt üzərindəki nöqtənin koordinatları işarə olunmuşdur. (1)-dən alırıq:

. (2)

Qeyd edək ki, hər bir  nöqtəsi üçün  parametri belə təyin edilir:

1) ,

2)  ilə  eyni istiqamətli olduqda ,  ilə  əks istiqamətli olduqda  olur.

(2)-dəki bərabərliklərə əsasən  dəyişənlərinin hər üçü eyni bir  parametri ilə ifadə olunurlar.

İndi isə  nöqtəsi ətrafında təyin olunmuş 3-dəyişənli  funksiyasına baxaq.

(2)-yə əsasən bu funksiyaya  dəyişəninin mürəkkəb funksiyası kimi baxmaq olar. Məlum düstura əsasən

. (3)

(2)-yə əsasən



olduğu üçün (3)-ü belə yazmaq olar:

. (4)

**Tərif.** (4) ilə təyin olunan  kəmiyyətinə ** funksiyasının  nöqtəsində  istiqaməti üzrə törəməsi** deyilir.

**Tərif.** Koordinatları  olan vektora ** funksiyasının  nöqtəsindəki qradiyenti** deyilir və



kimi işarə olunur.

(4)-ə və iki vektorun skalyar hasilinin koordinatlar ilə ifadə düsturuna görə

, (5)

yəni  törəməsi  ilə -nun skalyar hasilidir.  ilə  vektoru arasındakı bucağı  ilə işarə etsək, (5)-ə əsasən

. (6)

(6)-nın sağ tərəfi ən böyük qiymətini  olduqda alır:

.

Bu isə o deməkdir ki,  funksiyasının  nöqtəsindəki müxtəlif istiqamətlər üzrə törəmələrindən ən böyüyü bu nöqtədəki qradiyent istiqamətində olan törəmədir.

**Mövzu № 9. Çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumları**

**Çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumları: ekstremum nöqtəsinin tərifi. Ekstremum nöqtəsinin varlığı üçün zəruri şərt. İki dəyişənli funksiyanın ciddi ekstremumunun varlığı üçün kafi şərt.**

**Çoxdəyişənli funksiyanın lokal ekstremumu anlayışı. Lokal ekstremumun zəruri şərt teoremi**

Fərz edək ki,  funksiyası  nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuşdur.

**Tərif.**  nöqtəsinin -ətrafına daxil olan bütün nöqtələr üçün



olarsa, onda deyirlər ki,  funksiyası  nöqtəsində **lokal maksimuma** (**minimuma**) malikdir.

Lokal maksimum və lokal minimuma birlikdə **lokal ekstremum** deyilir.

Yuxarıdakı tərifdən alınır ki,  nöqtəsinin ətrafına daxil olan bütün nöqtələr üçün

 (1)

olduqda,  funksiyası  nöqtəsində lokal maksimuma (minimuma) malikdir.

**Teorem (Lokal ekstremumun zəruri şərt teoremi).** Tutaq ki,  funksiyası  nöqtəsində lokal ekstremuma malikdir. Onda bu nöqtədə birinci tərtib xüsusi törəmələr varsa, onlar hamısı bu nöqtədə sıfra bərabərdirlər.

**İsbatı.** Fərz edək ki,   nöqtəsində lokal ekstremuma malikdir və bu nöqtədə bütün xüsusi törəmələr vardır.  funksiyasında



yazsaq, birdəyişənli  funksiyası alarıq. Bu funksiya yalnız bir dənə  dəyişənindən asılıdır və  olduqda ekstremuma malikdir. Birdəyişənli funksiyalar üçün ekstremumun zəruri şərt teoreminə görə



 (2)

(2)-də ardıcıl olaraq  yazsaq,



alarıq.

Teorem isbat olundu.

Birinci tərtib bütün xüsusi törəmələrin sıfra bərabər olduğu nöqtəyə bu funksiyanın **mümkün ekstremum nöqtəsi** deyilir.

**İkidəyişənli funksiyalar üçün ekstremumun kafi şərt teoremi**

Fərz edək ki, bizə  nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş və  nöqtəsində kəsilməyən ikinci tərtib xüsusi törəmələrə malik olan  funksiyası verilmişdir. Aşağıdakı işarələri qəbul edək:

 (1)

. (2)

**Teorem (2-dəyişənli funksiyalar üçün ekstremumun kafi şərt teoremi).** Fərz edək ki,  funksiyası  nöqtəsinin müəyyən ətrafında iki dəfə diferensiallanandır və bu nöqtədə bütün ikinci tərtib xüsusi törəmələr kəsilməyəndirlər,  bu funksiyanın mümkün ekstremum nöqtəsidir. Onda  olarsa,  funksiyası bu nöqtədə lokal ekstremuma malikdir,  olduqda  nöqtəsində lokal maksimum,  olduqda isə lokal minimum var.  olduqda  nöqtəsində lokal ekstremum yoxdur

**İsbatı.** Əvvəlcə  götürüb,  funksiyası üçün Teylor düsturunu yazaq:

, (3)

burada  -ın göstərilən ətrafında daxil olan müəyyən nöqtədir.  mümükün ekstremum nöqtəsi olduğu üçün bu nöqtədə bütün birinci tərtib xüsusi törəmələr sıfra bərabərdirlər. Ona görə . Bunu (3)-də nəzərə alaq və ikinci tərtib tam diferensialın açıq ifadəsini yazaq:



,(4)

burada .

Şərtə görə ikinci tərtib xüsusi törəmələr  nöqtəsində kəsilməyən olduqları üçün (1)-ə əsasən yaza bilərik:



Burada  -in sonsuz kiçilən funksiyalarıdırlar:

, . (8)

(5)-(7)-ni (4)-də nəzərə alaq:



. (9)

Burada ,

. (10)

(10)-dan alınır ki,

 (11)

(8) və (11)-dən çıxır ki,

. (12)

Beləliklə, (9)-un sağ tərəfindəki  sonsuz kiçilən olduğu üçün və  olduğundan (9)-un sağ tərəfinin işarəsi

 (13)

kvadrat üçhədlisinin işarəsi ilə müəyyən olunur.  olduqda (13) üçhədlisinin həqiqi kökləri yoxdur və bu üçhədlinin işarəsi -in işarəsi ilə eynidir. Deməli,  olduqda (13) üçhədlisi, deməli (9)-un sağ tərəfi, yəni  mənfi qiymət alır: . Bu isə o deməkdir ki,  nöqtəsində lokal maksimum vardır.  olduqda isə  alınır, yəni lokal minimum vardır.

 olduqda (13) üçhədlisi işarəsini dəyişir. Buradan alınır ki,  həm müsbət, həm də mənfi ola bilər. Deməli,  nöqtəsində ekstremum yoxdur.

Teorem isbat olundu.

**Qeyd.**  olduqda  nöqtəsində funksiyanın ekstremumu ola da bilər, olmaya da bilər.

**Mövzu № 10. Çoxqat Riman inteqralı**

**Çoxqat Riman inteqralı. Çoxqat inteqralın təkrar inteqrala gətirilməsi (həm düzbucaqlı oblast halı, həm də əyrixətli oblast halı üçün**

**İkiqat inteqrallar, xassələri və hesablanması**

**Düzbucaqlı oblastlar üçün ikiqat inteqralın tərifi və hesablanma qaydaları**

Fərz edək ki, ,  düzbucaqlısında təyin olunmuş  funksiyası verilmişdir.  parçasını



0









…

















 nöqtələri ilə  sayda,  parçasını  nöqtələri ilə  sayda kiçik hissələrə bölək. Onda  düzbucaqlısı sayda kiçik ;; düzbucaqlılarına bölünər. Aydındır ki,  düzbucaqlısını sonsuz sayda üsullarla belə kiçik hissələrə bölmək olar. Hər bir belə bölgünü bir hərflə, məsələn, ilə işarə edirlər. , , - düzbucaqlısının sahəsini  işarə etsək, aydındır ki, ;  olar. Hər bir  düzbucaqlısında ixtiyari bir  nöqtəsi götürək və aşağıdakı kimi cəm düzəldək:

 (1)

Aydındır ki, (1) cəmi həm  düzbucaqlısının kiçik hissələrə bölgü qaydasından, həm də bu kiçik hissələrdəki aralıq nöqtələrinin seçilməsindən asılıdır.

**Tərif.** (1) cəminə  funksiyasının D düzbacıqlasında, onun bölgüsünə və aralıq nöqtələrinin verilmiş seçilişinə uyğun olan **inteqral cəmi** deyilir.

 ədədi  düzbucaqlısının diaqonalıdır. işarə edək.

**Tərif.** Elə ədədi varsa ki, ** ş**ərtləri ödənildikdə  düzbucaqlısının kiçik hissələrə bölgü qaydasından və aralıq nöqtələrinin seçilməsindən asılı olmayaraq



olsun, onda ədədinə  **inteqral cəminin şərtində limiti** deyilir.

**Tərif.**  funksiyasının  düzbucaqlısındakı inteqral cəminin **** şərtində sonlu limiti olduqda **-ə** -də **inteqrallanan funksiya**, bu limitə isə **-**in ** düzbucaqlısı üzrə ikiqat inteqralı** deyilir və

 və ya 

kimi işarə olunur.

Aydındır ki, yalnız düzbucaqlısında məhdud olan funksiyalar -də inteqrallanan ola bilərlər.

Fərz edək ki. **** funksiyası  düzbucaqlısında məhduddur. **-**inhər bir  düzbucaqlısındakı dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədlərini  ilə işarə edib, aşağıdakı iki cəmi düzəldək:

 .

 ədədinə **** funksiyasının  düzbucaqlısındakı **aşağı inteqral cəmi, -**ə isə **yuxarı inteqral cəmi** deyilir. Bu inteqral cəmləri birdəyişənli funksiyanın aşağı və yuxarı inteqral cəmlərinin malik olduğu oxşar xassələrə malikdir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

**Teorem.** düzbucaqlısında məhdud olan **** funksiyasının bu düzbucaqlıda inteqrallanan olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən  ədədinə görə  düzbucaqlısının elə bölgüsünün tapılmasıdır ki,



olsun.

Bu teorem birdəyişənli funksiyalar üçün inteqrallamanın zəruri və kafi şərt teoreminə oxşar şəkildə isbat olunur.

İndi isə düzbucaqlı oblastda ikiqat inteqralın hesablanma qaydasını göstərək. Bu fəslin birinci paraqrafından məlumdur ki, **** funksiyası düzbucaqlısında kəsilməyən olduqda -in  parçasından olan hər bir qiymətində



inteqralı var və  funksiyası  parçasında inteqrallanandır. Bundan əlavə aşağıdakı düstur doğrudur (**bu fəsil, §1, (9) düsturuna bax!**):

. (2)

İsbatsız olaraq qeyd edək ki,  inteqralı  ikiqat inteqralını verir, yəni

 (3)

bərabərliyi doğrudur. (2) və (3) düsturlarınadan aşağıdakı düsturun doğruluğu alınır:

. (4)

(4)-ə düzbucaqlı oblastda **ikiqat inteqralın təkrarlı müəyyən inteqral ilə hesablama düsturu** deyilir.

Bəzən (4) düsturunu

 (5)

şəklində yazırlar.

**Misal. ** düzbucaqlısı üzrə ikiqat inteqralını hesablayın.

**Həlli:** Tələb olunan inteqralı (4) düsturu üzrə hesablayacağıq:



**Düzbucaqlı olmayan oblastlar üçün ikiqat inteqralın tərifi və hesablanma qaydaları**



0







Şəkil 1

Fərz edək ki  müsətvisi üzərində qapalı, məhdud  oblastı və bu oblastda təyin olunmuş, məhdud  funksiyası verilmişdir. Tərəfləri koordinat oxlarına paralel olan elə bir  düzbucaqlısı götürək ki,  oblastı tamamilə -nin daxilində qalsın (şəkil 1).  düzbucaqlısında aşağıdakı qayda ilə köməkçi  funksiyasını təyin edək:

**Tərif.**  funksiyası  düzbusaqlısında inteqrallanan olduqda -ə **Ω oblastında inteqrallanan funksiya** deyilir. ***f*(*x,y*)*-*in Ω oblastı üzrə ikiqat inteqralı**



düsturu ilə təyin edilir.

Qeyd edək ki,  oblastı üzrə ikiqat inteqrala bu oblastı ixtiyari qayda üzrə kiçik hissələrə bölüb, aralıq nöqtələr seçəməklə də tərif vermək olar.

İndi isə düzbucaqlı olmayan bəzi oblastlar üçün ikiqat inteqralın hesablanma qaydalarını göstərək.



0













Şəkil 2

Fərz edək ki, qapalı, məhdud  oblastı elə şəkildədir ki,  ilə ortaq nöqtəsi olub  oxuna paralel olan hər bir düz xətt onun sərhəddini ən çoxu iki nöqtədə kəsir. Tutaq ki, ,  bu oblastda daxil olan bütün nöqtələrdən ən kiçik absisə və ən böyük absisə malik olan nöqtələrin absisləridir (şəkil 2).  oxuna paralel olan düz xətlərin  oblastının sərhəddini kəsdiyi nöqtələrin ordinatları  və -dir: .

Əgər  funksiyası  oblastında inteqrallanandırsa və hər bir  üçün



inteqralı varsa, onda aşağıdakı düstur doğrudur:

. (1)

İndi isə tutaq ki,  oblastı elə şəkildədir ki,  oxuna paralel olan hər bir düz xətt onun sərhəddini ən çoxu iki nöqtədə kəsir (şəkil 3). Bu halda əgər  funksiyası  oblastında inteqrallanandırsa və hər bir  üçün



0













Şəkil 3



inteqralı varsa, onda aşağıdakı düstur doğrudur:

. (2)







1

2







Şəkil 4

Burada , -ilə  oblastına daxil olan bütün nöqtələrdən ən kiçik və ən böyük ordinata malik olan nöqtələrin ordinatları işarə olunmuşdur.

**Misal.**  ilə  müstəvisi üzərində , ,  xətləri ilə məhdud edilmiş oblasti işarə olunduqda  ikiqat inteqralını hesablayın.

**Həlli.**  oblastı şəkil 4-də olan ştrixlənmiş hissədir. Əvvəlcə  xətlərinin kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapaq: ,  və  tənliklə-rindən  

Tələb olunan inteqralı (1) düsturunun köməyi ilə hesablayacağıq. Şəkil 4-ə əsasən  , , . Bunları (1)-də nəzərən alaq:





Hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edərək,  və  ilə işarə olunan inteqralları hesablayaq:









 və  üçün tapılan bu qiymətləri yuxarıda aldığımız  düsturunda yerlərinə yazaq:



Beləliklə, .

**İkiqat inteqralın xassələri**

İkiqat inteqral birdəyişənli funksiyaların müəyyən inteqralının malik olduğu oxşar xassələrə malikdir.

**1. (Additivlik). ** funksiyası  oblastında inteqrallanandırsa,  oblastı daxili ortaq nöqtələri olmayan  oblastlarına bölünmüşdürsə, onda **** funksiyası  oblastlarının hər birində inteqrallanandır və



düsturu doğrudur.

**2. (Xəttilik).** **** və  funksiyaları  oblastında inteqrallanandırsa, -isə istənilən ədədlərdirsə, onda  funksiyası da  oblastında inteqrallanandır və



düsturu doğrudur.

**3.** Əgər **,**  funksiyaları  oblastında inteqrallanandırsa,onda onların hasili də  oblastında inteqrallanandır.

**4.** ** ,** funksiyaları  oblastında inteqrallanandırsa və  oblastında şərti ödənilirsə, onda



bərabərsizliyi doğrudur.

**5. ** funksiyası  oblastında inteqrallanan olduqda  funksiyası da  oblastında inteqrallanandır və



bərabərsizliyi doğrudur (-in -da inteqrallanmasından **-**in -da inteqrallanması çıxmır).

**6.** Əgər ** ,** funksiyalarının hər ikisi -da inteqrallandırsa, -isə **** funksiyasının -da dəqiq aşağı, dəqiq yuxarı sərhədləridirsə və  funksiyası -da işarəsini dəyişmirsə, onda  şərtini ödəyən elə  ədədi var ki,



bərabərliyi doğrudur.Xüsusi halda **** funksiyası -da kəsilməyəndirsə, onda  oblastında elə nöqtəsi vardır ki,



bərabərliyi doğrudur.

**7.**  ikiqat inteqralı ədədi qiymətcə  oblastının sahəsinə bərabərdir:sahə .

Bu xassələrin isbatları müəyyən inteqralın oxşar xassələrinin isbatlarına analoji şəkildə aparılır.

Bu fəsildə §2-də düzbucaqlı oblastlar üçün, §3 –də isə düzbucaqlı olmayan, lakin müəyyən şərtləri ödəyən  oblastları üçün ikiqat inteqralların hesablanma qaydaları verildi.Əgər verilən  oblastı §3 –də  oblastı üzərinə qoyulan şərtləri ödəmirsə, lakin onu sonlu sayda daxili ortaq nöqtələri olmayan elə  oblastlarına bölmək olarsa ki, bu oblastların hər biri həmin şərtləri ödəyir, onda ikiqat inteqralın birinci xassəsindən istifadə edərək, verilən inteqralı



düsturunun köməyi ilə hesablamaq olar.

**Misal.**  ilə  müstəvisi üzərində  və  xətləri ilə məhdud edilmiş oblast işarə olunmuşdur.  ikiqat inteqralını hesablayın.





12





-4

-3

0



**Həlli.**  parabolası  düz xətti ilə iki nöqtədə kəsişirlər. Həmin nöqtələrin absislərini tapaq.





 oblastı şəkildəki ştrixlənmiş müstəvi hissəsidir.  ikiqat inteqralının hesablanmasına bu fəsildə §3 –də verilmiş (1) düsturunu birbaşa tətbiq etmək olmaz.  oblastında ən kiçik absis -4, ən böyük absis isə 12-dir.Bu oblast üçün §3 –dəki (1) düsturunda olan  funksiyası rolunu  funksiyası oynayır.Lakin bu oblast yuxarıdan iki müxtəlif funksiyaların qrafikləri ilə əhatə olunmuşdur.-in -4-dən -3-ə kimi olan qiymətlərində oblast yuxarıdan  funksiyasının qrafiki ilə , -in -3-dən 12-yə kimi olan qiymətlərində isə yuxarıdan  funksiyasının qrafiki ilə əhatə olunmuşdur.

 düz xətti  oblastını şəkildə müxtəlif istiqamətli ştrixlənmə ilə göstərilmiş  və  hissələrinə bölür.İkiqat inteqralın birinci xassəsinə görə



bərabərliyi doğrudur.  oblastı üzrə olan inteqralı bu fəsildə §3–də verilən (2) düsturu ilə,  oblastı üzrə olan inteqralı isə (1) düsturu ilə hesablayacağıq.

 inteqralı üçün (2) düsturunda   götürmək lazımdır. Onda alırıq:







Biz tək funksiyanın koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik parça üzrə müəyyən inteqralının sıfra bərabər olmasından istifadə etdik.

İndi isə  oblastı üzrə olan inteqralı bu fəsil §3 –dəki (1) düsturu ilə hesablayaq.Bu misalda (1) düsturunda  götürmək lazımdır.Onda alırıq:



Beləliklə,  olduğu üçün



**İkiqat inteqralda dəyişənin əvəz edilməsi**

Bir çox hallarda verilmiş ikiqat inteqralı hesablamaq çətin olduğu halda, yeni koordinantlara keçdikdə alınan ikiqat inteqral asanlıqla hesablanır.

Fərz edək ki,

 (1)

ikiqat inteqralını hesablamaq tələb olunur.

 koordinantlarından

 (2)

düsturları vasitəsilə yeni  koordinantlarına keçək. Tutaq ki, (2) çevirməsi  koordinantlar fəzasındakı  oblastı ilə  koordinantlar fəzasındakı  oblastı arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğun yaradır. Əlavə olaraq fərz edək ki ,  funksiyaları  oblastında birinci tərtib kəsilməyən törəmələrə malikdirlər və

 (3)

determinatı sıfırdan fərqlidir. (3) düsturu ilə təyin olunan  kəmiyyətinə alman riyaziyyatçısı Karl Qustav Yakov Yakobinin (1804-1851) şərəfinə (2) çevrilməsinin **Yakobi determinatı** və ya sadəcə olaraq **yakobianı** deyilir.

Yuxarıdakı şərtlər ödənildikdə aşağıdakı düstur doğrudur:

 (4)

(4)-ə **ikiqat inteqralda dəyişəni əvəzetmə düsturu** deyilir.

(2) çevrilməsinin xüsusi halına , yeni koordinantlar  və  polyar koordinantları olan hala baxaq. Məlumdur ki polyar koordinantlardan duzbucaqlı koordinantlara keçid düsturları

 (5)

şəklindədir. (5) çevrilməsinin yakobianını tapaq:



Ona görə də polyar koordinatlara keçdikdə (4) düsturu aşağıdakı şəklə düşür:

 (6)

**Misal 1. -**oblastı mərkəzi koordinant başlanğıcından olan  radiuslu dairədir.  ikiqat inteqralını hesablayın.

**Həlli.** (5) düsturları üzrə polyar koordinatlara keçdikdə  dairəsi  oblastına çevrilir.  olduğu üçün  funksiyası  funksiyasına çevrilir.  götürüb, (6) düsturuna əsasən alırıq:



**Misal 2. ** ilə  müstəvisi üzərində  xətti ilə məhdud edilmiş oblastın birinci koordinat rübünə düşən hissəsi işarə olunmuşdur. Dəyişənləri səmərəli şəkildə əvəz edərək,  ikiqat interqralını hesablayın.

**Həlli. ** dəyişənlərini  düsturları üzrə əvəz edək. Belə əvəzləmədə  xəttinin birinci koordinat rübünə düşən hissəsi  koordinatlarında  dörddə bir çevrəsinə çevrilir.Bu çevirmənin yakobianını hesablayaq:

.

(4) düsturuna əsasən alırıq:



**Mövzu № 11. Əyrixətli inteqrallar**

**Əyri və onun uzunluğu. Əyrixətli inteqrallar. Qrin düsturu: Qrin düsturunun tətbiqi ilə fiqurun sahəsinin hesablanması.**

Fərz edək ki, müstəvisi üzərində sonlu  uzunluğuna malik olan hamar əyrisi və bu əyri üzərində təyin olunmuş, həmin əyri boyunca kəsilməyən  funksiyası verilmişdir.  funksiyası  əyrisi boyunca kəsilməyəndir dedikdə nəzərdə tutulur ki, əyrisi üzərində olub,  şərtini ödəyən ixtiyari iki  nöqtələri üçün



şərti ödənilir. Əslində biz kəsilməzliyin deyil, müntəzəm kəsilməzliyin tərifini verdik. Qapalı məhdud əyrilər üzərində kəsilməzlik və müntəzəm kəsilməzlik anlayışları üst-üstə düşür.





0















...

 əyrisini onun üzərində yerləşən   nöqtələri ilə  sayda kiçik 

hissələrinə bölək. Hər bir kiçik  əyrisi üzərində ixtiyari  nöqtəsi götürürb aşağıdakı kimi cəm düzəldək:

. (1)

Burada  ilə  əyrisinin uzunluğu işarə olunmuşdur.  ilə içarə edək.

**Tərif. ** şərtindəəyrisinin kiçik hissələrə bölgü qaydasından və bu kiçik hissələrdə aralıq nöqtələrinin seçilməsindən asılı olmayaraq (1) cəminin sonlu limiti varsa, onda  funksiyasına  əyrisi boyunca inteqrallanan funksiya, bu limitə isə  funksiyasının **** **əyrisi üzrə I növ əyrixətli inteqralı** deyilir və  kimi işarə olunur.

(1) inteqral cəminin limiti (əgər varsa), dedikdə elə ədədi nəzərdə tutulur ki, olduqda,  şərti ödənilsin.

Fərz edək ki,  əyrisi

 (2)

parametrik tənlikləri ilə verilmişdir. Tutaq ki,  və  funksiyaları  parçasında kəsilməyən birinci tərtib törəmələrə malikdirlər.

 parametrinin müəyyən qiymətində  oarsa,  əyrisi üzərində -nin bu qiymətinə uyğun gələn nöqtəyə **məxsusi nöqtə** deyilir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

**Teorem.** -(2) parametrik tənlikləri ilə verilmiş məxsusi nöqtələri olmayan hamar əyri,  funksiyası isə bu əyri üzərində kəsilməyən funksiya olduqda,  funksiyası  əyrisi boyunca inteqrallanandır və

 (3)

düsturu doğrudur.

(3) düsturu  **əyrisi parametrik tənliklərlə verildikdə birinci növ əyrixətli inteqralın müəyyən inteqral vasitəsilə hesablanma düsturu** adlanır.

 əyrisi adi şəkildə   düsturu ilə verildikdə (3) düsturunda  parametri əvəzinə  dəyişənini qəbul edib,  götürərək aşağıdakı düsturu alırıq:

 . (4)

(4) düsturu ** əyrisi   düsturu ilə verildikdə birinci növ əyrixətli inteqralın müəyyən inteqral vasitəsilə hesablanma düsturu** adlanır.

Qeyd edək ki, birinci növ əyrixətli inteqralın qiyməti əyrinin istiqamətindən asılı deyildir, yəni



Birinci növ əyrixətli inteqralın bir fiziki tətbiqini göstəririk. Müəyyən bir cismin kütləsi **** əyrisi üzrə paylanmışdırsa və  funksiyası bu cismin kütləsinin həmin əyri üzrə xətti sıxlığını göstərirsə, onda  əyrixətli inteqralı həmin cismin kütləsini ifadə edir.

Əyrixətli inteqrallar müəyyən inteqralın malik olduğu oxşar xassələrə malikdirlər.

**1. Xəttilik xassəsi.** Əgər  funkiyaları **** əyrisi üzrə inteqrallanandırlarsa, onda istənilən  sabitləri üçün  funksiyası da  əyrisi üzrə inteqrallanandır və



düsturu doğrudur.

**2.** Əgər əyrisi daxili ortaq nöqtəsi olmayan  və  əyrilərinin birləşməsidirsə və  funksiyası  əyrisi üzrə inteqrallanandırsa, onda  funksiyası ,  əyrilərinin hər biri üzrə inteqrallanandır, həm də



düsturu doğrudur.

**3.** Əgər  funksiyası  əyrisi üzrə inteqrallanandırsa, onda  funksiyası da  əyrisi üzrə inteqrallanandır və



bərabərlsizliyi doğrudur.

**4. Orta qiymət düsturu.** Əgər  funksiyası  əyrisi boyunca kəsilməyəndirsə, onda bu əyri üzərində elə 

nöqtəsi vardır ki, 

düsturu doğrudur. Burada - ilə  əyrisinin uzunluğu işarə olunmuşdur.

**İkinci növ əyrixətli inteqrallar**

Fərz edək ki,  müstəvisi üzərində hamar  əyrisi və bu əyri üzərində kəsilməyən  funksiyaları verilmişdir.Bu fəslin birinci paraqrafında olduğu kimi əyrisini onun üzərində yerləşən  nöqtələri ilə sayda kiçik hissələrə bölüb, hər bir kiçik  hissəsində ixtiyari bir  nöqtəsi götürək. Hər bir  əyri qövsünün uzunluğunu  ilə işarə edib aşağıdakı iki cəmi düzəldək:



Burada  işarə olunmuşdur.  ilə işarə edək.

**Tərif.** şərtində əyrisinin kiçik hissələrə bölgü qaydasından və bu kiçik hissələrdə aralıq nöqtələrinin seçilməsindən asılı olmayaraq inteqral cəminin sonlu limiti varsa,  funksiyasına əyrisi üzrə  dəyişəninə nəzərən inteqrallanan funksiya, bu limitə isə ***P*(*x*,*y*) funksiyasının *AB*** **əyrisi üzrə *x* dəyişəninə nəzərən ikinci növ əyrixətli inteqralı** deyilir və  kimi işarə olunur.

Bu tərifə əsasən

 (1)

Oxşar qayda ilə ***Q*(*x*,*y*) funksiyasının *AB*** **əyrisi üzrə  dəyişəninə nəzərən ikinci növ əyrixətli inteqralı **inteqral cəminin **** şərtində limiti kimi təyin edilir və belə işarə olunur:

 (2)

(1) və (2) düsturları ilə təyin olunan  və  inteqrallarının cəminə ** əyrisi üzrə ümumi ikinci növ əyrixətli inteqral** deyilir və  kimi işarə olunur.Bu tərifə əsasən

 (3)

Birinci növ əyrixətli inteqrallardan fərqli olaraq ikinci növ əyrixətli inteqralların qiymətləri əyrinin istiqamətindən asılıdır. Doğrudan da əyrinin istiqaməti dəyişdikdə (1) və (2)-nin sağ tərəflərində  əvəzinə - , əvəzinə -götürüldüyü üçün



olacaqdır.

Qapalı və müsbət istiqamətdə götürülmüş konturu üzrə olan ikinci növ əyrixətli inteqrallar



kimi işarə olunurlar.

İsbat etmək olar, ****

**** (4)

parametrik tənlikləri ilə verilmiş hamar əyri,  və  isə bu əyri üzərində kəsilməyən funksiyalar olduqda , (3) ikinci növ əyrixətli inteqralı üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

 (5)

(5)-in sağ tərəfindəki inteqralaltı ifadəni almaq üçün (4)-ə əsasən

(3)-ün sağ tərəfində  əvəzinə  əvəzinə əvəzinə

 əvəzinə  yazmaq kifayətdir.

Əgər **** hamarəyri olub, adi şəkildə

 (6)

düsturu ilə verilmişdirsə,  və funksiyaları isə bu əyri üzərində kəsilməyəndirlərsə, onda

 (7)

düsturu doğrudur. (7)-nin sağ tərəfindəki inteqralaltı ifadəni almaq üçün (6)-ya əsasən (3)-ün sağ tərəfində  əvəzinə  əvəzinə isə  yazmaq kifayətdir.

Qeyd edək ki, (5) və (7) düsturlarının isbatları birinci növ əyrixətli inteqralların müəyyən inteqral ilə hesablanma düsturlarının isbatları kimidir **(bu isbat proseslərini özünüz sərbəst aparın!).**

Ikinci növ əyrixətli inteqrallar da birinci növ əyrixətli inteqralların malik olduğu oxşar xassələrə malikdirlər.

**Mövzu № 12. Səth inteqralları**

**Səth anlayışı. Səthin sahəsi. Səth inteqralları. Qauss–Ostroqradski düsturu: Qauss–Ostroqradski düsturunun tətbiqi ilə fiqurun həcminin hesablanması.**

Səth inteqralı ilə tanış olmamışdan qabaq səth anlayışı ilə tanış olaq. Səth dedikdə *Oxyz* fəzasının elə nöqtələr çoxluğu başa düşülür ki, bu nöqtələr ( isə müstəvisində verilmiş oblastdır),  ( isə müstəvisində verilmiş oblastdır)və ya  ( isə müstəvisində verilmiş oblastdır) tənliyini ödəyir. Bu halda deyirlər ki, səth aşkar şəkildə verilmişdir. Əgər  funksiyası *D* oblastında kəsilməzdirsə, bu tənliklə verilmiş səth də kəsilməz səth adlanır. Bundan başqa səth qeyri-aşkar və parametrik şəkildə verilə bilər.

Bundan sonra səth dedikdə aşağıdakı şərtləri ödəyən səthlər nəzərdə tutulacaq:

1. *D* oblastı qapalı və məhduddur, onun sərhəddi  isə hissə-hissə hamar əyridir
2. *D* oblastının müxtəlif nöqtələrinə səthin müxtəlif nöqtələri uyğun gəlir.

Səthin *D* oblastının sərhəd nöqtələrinə uyğun nöqtələri səthin sərhəddi adlanır. Səthin sərhəddə aid olmayan nöqtələri səthin daxili nöqtələri adlanır.

Tutaq ki, *S* hər hansı səthdir, *F(M)* isə bu səthdə kəsilməz funksiyadır. *S* səthini *n* hissəyə bölək .  bu hissələrin sahəsi,  isə bu hissələrdə yerləşən nöqtələr olsun. Aşağıdakı kimi cəm düzəldək:



Bölgünün sayını sonsuz artırdıqda,  sahəsini isə sonsuz kiçiltdikdə bu cəmin limitinə *F(M)* funksiyasının *S* səthi üzrə inteqralı deyilir:



Tutaq ki, *S* səthinin *Oxy* müstəvisinə proyeksiyası -dır və *Oz* oxuna paralel olan düz xətlər *S* səthini yalnız bir nöqtədə kəsir. *S* səthinin və  proyeksiyasının sahələri arasındakı əlaqə düsturuna görə (*S* səthi üzrə )səth inteqralını hamar  oblastı üzrə inteqrala gətirmək olar. *S* səthinə *(x,y,z)* nöqtəsində çəkilmiş normalın yönəldici kosinusları aşağıdakı kimi təyin olunur:



Onda



Əgər *S* səthinin tənliyi aşkar şəkildə verilmişdirsə, onda  funksiyasında *z*-in yerinə  ifadəsini yazmaq lazımdır.

*V* həcmi üzrə üçqat inteqralla *S* səthi üzrə səth inteqralı arasında əlaqə yaradan Ostraqradski düsturu çoxqat inteqrallar bəhsində əsas düsturlardan biridir.



Burada  *S* səthinə çəkilmiş xarici normalın koordinatlarıdır.  *v* həcmində verilmiş vektor (поле) sahəsidir. və 



Qeyd edək ki, səth inteqralları da ikiqat inteqralların orta qiymət haqqında teorem də daxil olmaqla bütün xassələrinə malikdir.

1. 
2. 
3. 

Əgər *S* səthi  tənliyi ilə verilmişdirsə,



Əgər *S* səthi  tənliyi ilə verilmişdirsə,



Əgər *S* səthi  tənliyi ilə verilmişdirsə,



**Mövzu № 13. Parametrdən asılı inteqrallar**

**Parametrdən asılı inteqrallar.**

Fərz edək ki,  düzbucaqlısında təyin olunmuş 2-dəyişənli  funksiyası verilmişdir. Aydındır ki, -in  parçasından olan hər hansı bir  qiymətində  funksiyası  parçasında təyin olunmuş birdəyişənli  funksiyasına çevrilir. Tutaq ki, -in  parçasında olan hər bir qeyd olunmuş qiymətində  funksiyası  dəyişəninə nəzərən  parçasında inteqrallanandır. Başqa sözlə -in  parçasında olan hər bir qiyməti üçün







0









 (1)

inteqralı təyin olunmuşdur. Aydındır ki, (1) inteqralının qiyməti  dəyişənindən asılıdır. Ona görə bu inteqrala  dəyişənindən asılı olan,  parçasında təyin olunmuş funksiya kimi baxmaq olar. Bu funksiyanı  ilə işarə edək:

 (2)

(2) düsturu ilə təyin olunan funksiyasına ***y* parametrindən asılı olan inteqral** deyilir.

 funksiyası daha mürəkkəb strukturlu çoxluqda, məsələn  şəkilli çoxluqda verildikdə parametrdən asılı olan inteqral

 (3)

düsturu ilə təyin edilir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

**Teorem 1.**  funksiyası  düzbucaqlısında kəsilməyən olduqda (2) düsturu ilə təyin olunan  funksiyası  parçasında kəsilməyəndir.

**İsbatı.** -in  parçasından olan hər hansı qeyd olunmuş qiymətinə elə  artımı verək ki, də  parçasına daxil olsun. (2)-dən alınır:

 (4)

 düzbucaqlısı qapalı məhdud oblast olduğu üçün  funksiyasının -də kəsilməzliyindən onun -də müntəzəm kəsilməzliyi alınır. Ona görə



şərtləri ödənildikdə



olur. Sonuncu bərabərsizliyə və müəyyən inteqralın məlum xassəsinə əsasən (4)-dən alırıq:



Buradan kəsilməzliyin artım mənada tərifinə əsasən  funksiyasının  parçasında kəsilməyən olduğu alınır.

Teorem 1 isbat olundu.

**Teorem 2.**  funksiyası və onun  xüsusi törəməsi  düzbucaqlısında kəsilməyən olduqda (2) düsturu ilə təyin olunan  funksiyası  parçasında diferensiallanandır və

 (5)

düsturu doğrudur.

**İsbatı.** -in  parçasından olan hər bir qeyd olunmuş qiymətində -ə  dəyişənindən asılı birdəyişənli funksiya kimi baxıb,  fərqinə Laqranj düsturunu tətbiq edək:

. (6)

Burada  ilə (0,1) inteqralında olan müəyyən bir ədəd işarə olunmuşdur. (6)-nı (4)-ün sağ tərəfində nəzərə alıb, alınan bərabərliyin hər iki tərəfinə -ə bölək:

. (7)

(7)-yə və müəyyən inteqralın məlum xassəsinə görə alırıq:

 (8)

Teoremin şərtinə əsasən  funksiyası -də kəsilməyəndir. Deməli, həm də müntəzəm kəsilyəndir. Ona görə



şərtləri ödənildikdə



olur. Bunu (8)-in sağ tərəfində nəzərə aldıqda



alınır. Bu isə o deməkdir ki,

,

yəni (4) düsturu doğrudur.

Teorem 2 isbat olundu.

**Teorem 3.**  funksiyası  düzbucaqlısında kəsilməyən olduqda (2) ilə təyin olunan  funksiyası  parçasında inteqrallanandır və

 (9)

düsturu doğrudur.

**İsbatı.** Bu paraqrafdakı teorem 1-ə görə  funksiyası -də kəsilməyən olduqda (2) ilə təyin olunan  funksiyası  parçasında kəsilməyəndir, deməli həm də inteqrallanandır. ona görə teorem 3-ün isbatını başa çatdırmaq üçün yalnız (8) düsturunun doğruluğunu göstərmək qalır.

Aşağıdakı iki köməkçi funksiyaya baxaq:

. (10)

Bu paraqrafdakı teorem 2-yə və yuxarı sərhəddi dəyişən olan inteqraldan törəməalma qaydasına görə (10)-dan alırıq:



Göründüyü kimi, , buradan isə   alınır. Lakin (10) düsturlarına əsasən olduğu üçün  olmalıdır. Sonuncu bərabərlikdə  götürüb, (10) düsturlarını nəzərə aldıqda (9) düsturu alınır.

Teorem 3 isbat olundu.

İsbatsız olaraq qeyd edək ki, , funksiyaları  oblastında,  funksiyaları isə  parçasında kəsilməyən olduqda parametrdən asılı olan (3) inteqralı üçün



düsturu doğrudur.